# Achtung: Fourier-Spektrum

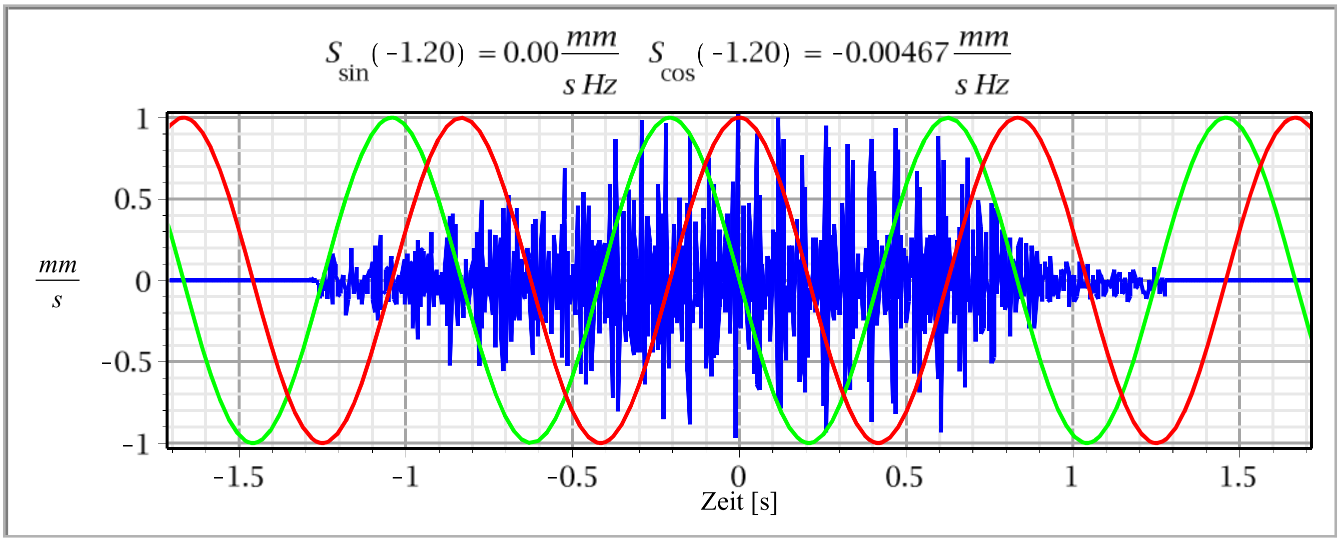
Dr.M.Ringger
Gruner AG Basel

## 1 Die Fourier-Transformation

Einem kontinuierlichen **Zeitsignal** $s(t)$, welches eine beschränkte Energie hat (mathematisch korrekter: welches quadrat-integrierbar ist), wird ein **Sinus** und **Cosinus** überlagert und die **Fourier-Intergrale** gebildet:

$$S_{\sin}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot f)\cdot \mathrm{d}t \qquad S_{\cos}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot\cos(2\cdot\pi\cdot f)\cdot \mathrm{d}t$$

So „liest“ man die Anteile des **Sinus** und **Cosinus** aus dem **Zeitsignal s(t)**.



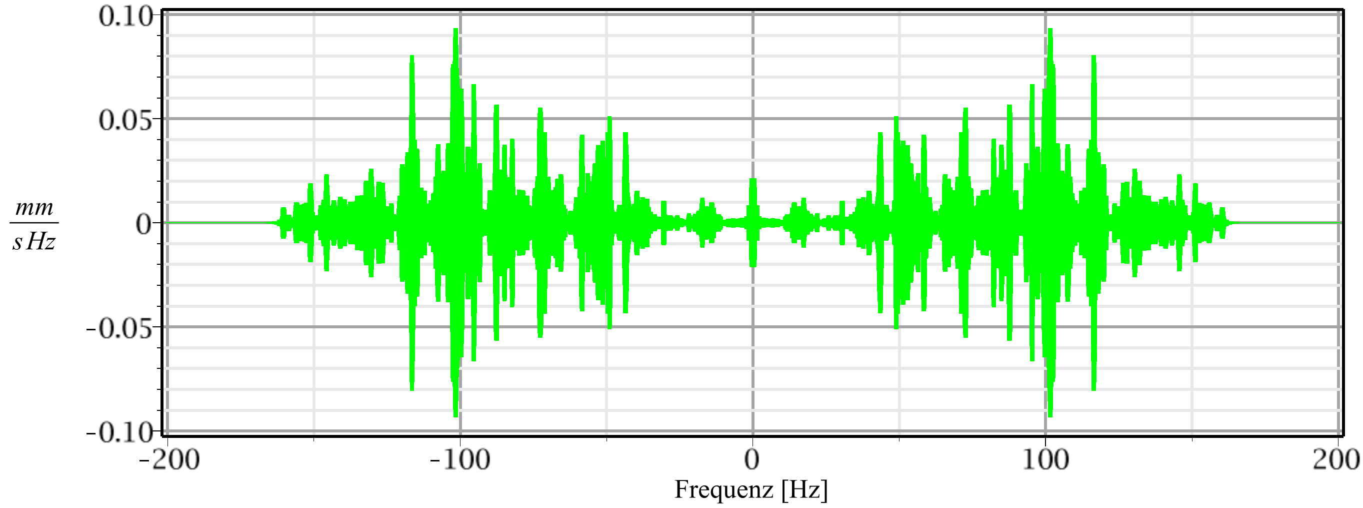

Der Wert des **Cosinus** bei 0 Hz ist der **DC-Offset** des **Zeitsignals**. Wir erhalten so die **Fourier-Transformierte** mit folgenden Eigenschaften:

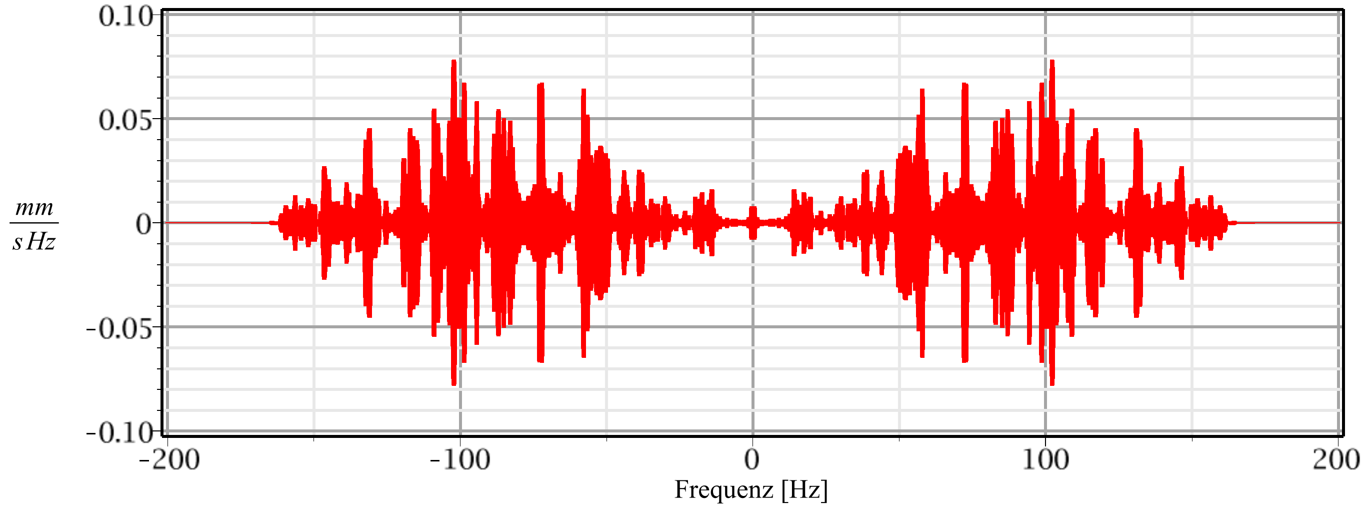
• Die **Fourier-Transformierte** ist eine **Dichte** mit der Einheit $\frac{\frac{mm}{s}}{Hz}$

• Aus der **Fourier-Transformierten** kann durch eine Rücktransformation das **Zeitsignal** wiederhergestellt werden.

• Die **Fourier-Transformierte** ist im Bereich -∞ bis +∞ Hz definiert .

• Der **Sinus-Anteil** ist anti-symmetrisch und der **Cosinus-Anteil** ist symmetrisch zur 0 Hz Achse. Der **Sinus-Anteil** repräsentiert die anti-symmetrischen und der **Cosinus-Anteil** die symmetrischen Anteile des **Zeitsignals**.




## 2 Das Parceval'sche Theorem für kontinuierliche Signale und Spektren

Es ist zu erwarten, dass wenn aus der **Fourier-Transformierten** das **Zeitsignal** vollständig wiederhergestellt werden kann, die Energie erhalten bleiben sollte. Tatsächlich gilt das fundamentale **Parceval'sche Theorem**, nach welchem gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\sin}^2(f)\cdot \mathrm{d}f + \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\cos}^2(f)\cdot \mathrm{d}f$$

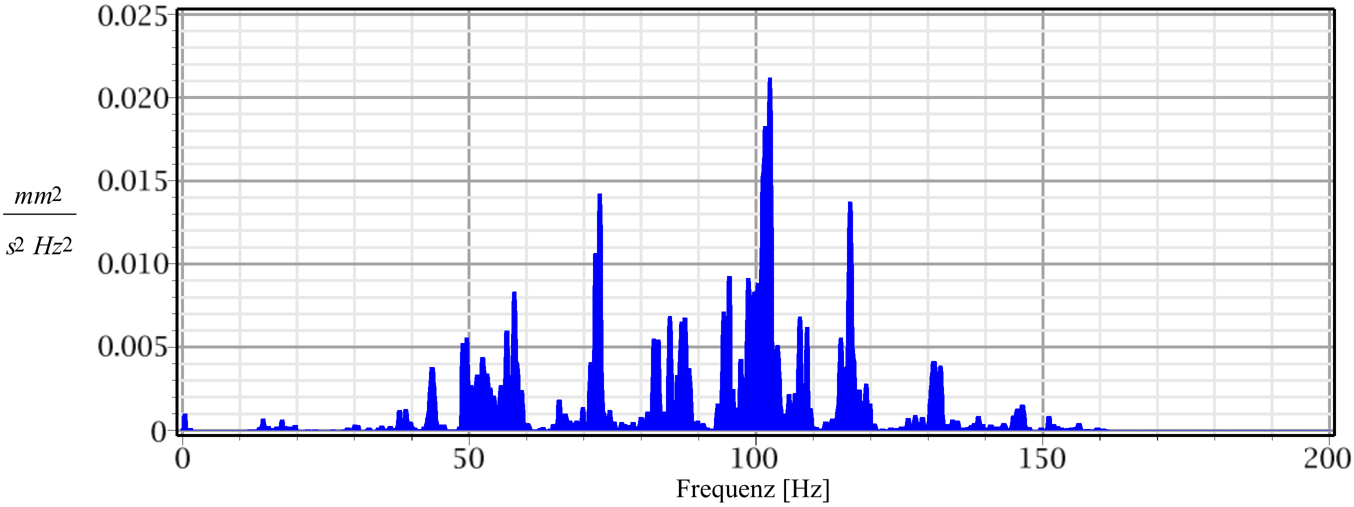
Für die Einheiten lässt sich die Richtigkeit des **Parceval'schen Theorems** einfach überprüfen:

$$\left(\frac{mm}{s}\right)^2 \cdot s = \frac{\left(\frac{mm}{s}\right)^2}{Hz}$$

## 3 Das Energie-Spektrum

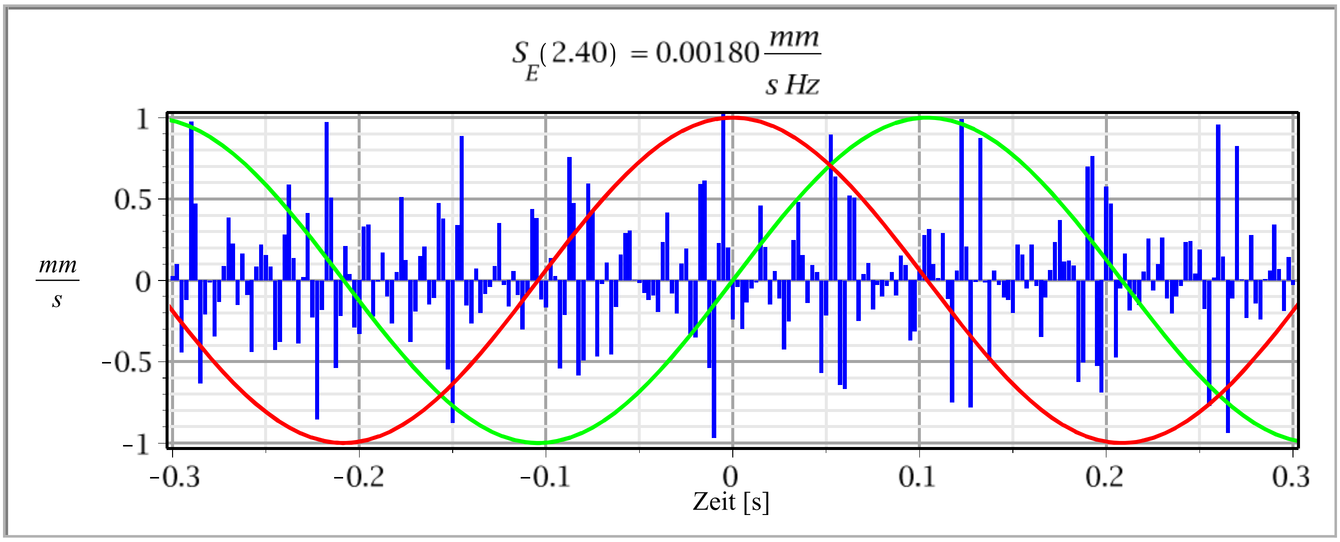
Uns interessiert meistens nicht so sehr die **Fourier-Transformierte**, sondern wieviel **Energie** das **Zeitsignal s(t)** bei einer bestimmten Frequenz hat. Man kann unter Rückgriff auf das **Parceval'sche Theorem** das **Energie-Spektrum** berechnen, indem man die quadrierten **Sinus**- und **Cosinus**-Anteile für einen bestimmten Frequenz-Betrag zusammenzählt. So erhält man das **Energie-Spektrum** $S_E$:

$$S_E^2(|f|) = S_{\sin}^2(-f) + S_{\cos}^2(-f) + S_{\sin}^2(+f) + S_{\cos}^2(+f)$$



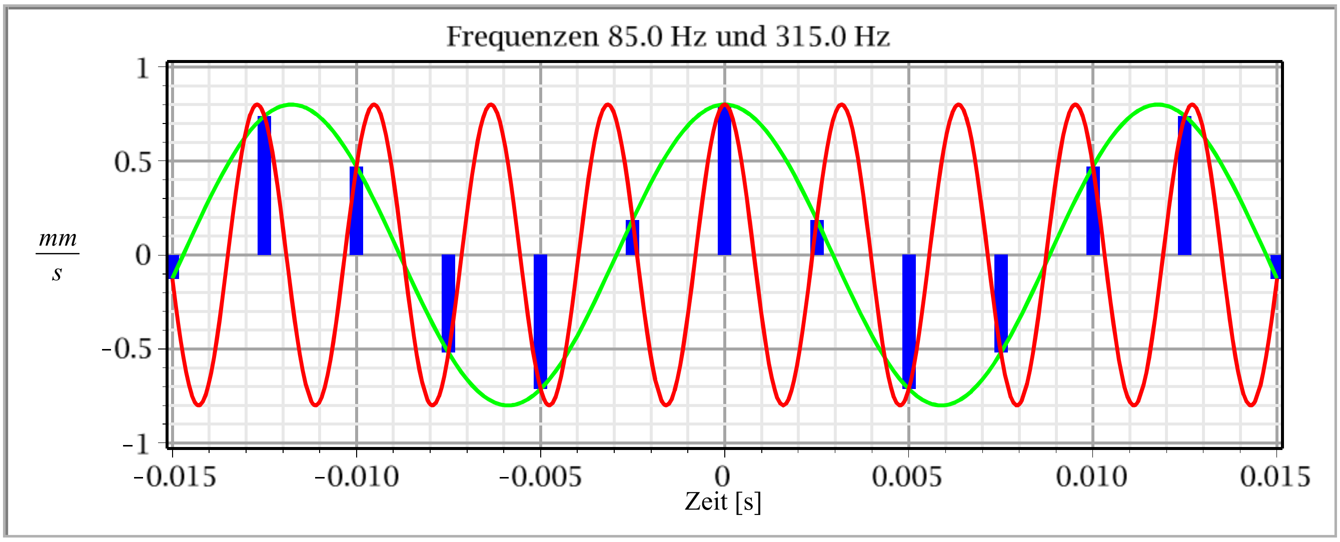

## 4 Das diskrete Energie-Spektrum

Nun begegnen uns in Wirklichkeit keine unendlich langen, kontinuierlichen **Zeitsignale**, sondern zeitlich beschränkte **Zeitsignale**, die zudem in **diskreter Form** mit einer bestimmten **Abtast-Rate** $f_s$ (engl. Sampling-Rate) vorliegen. Die **Abtast-Rate** ist die Rate pro Sekunde (Einheit Hz), mit welcher der **Analog-Digital-Wandler** das Signal ausliest.



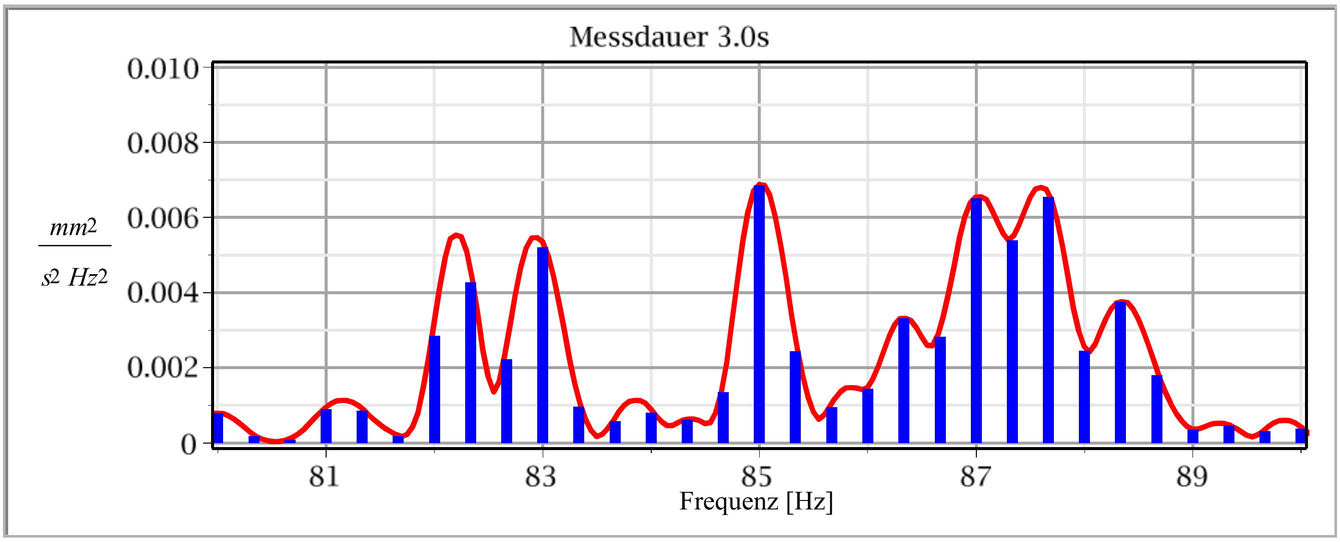
# 5 Aliasing

Für Frequenz-Anteile des **Zeitsignals** unterhalb und oberhalb der halben **Abtast-Rate** in gleichem Abstand zur halben **Abtast-Rate** liefert der **Analog-Digital-Wandler** die gleichen Werte! Dies nennt man **Aliasing**. Bekannt ist das Phänomen auch aus dem Film, wo drehende Räder stehen zu bleiben scheinen oder sogar rückwärts laufen. Deshalb werden **Anti-Aliasing-Filter** eingesetzt, welche die Frequenzanteile des **Zeitsignals** oberhalb der halben **Abtast-Rate** unterdrücken.



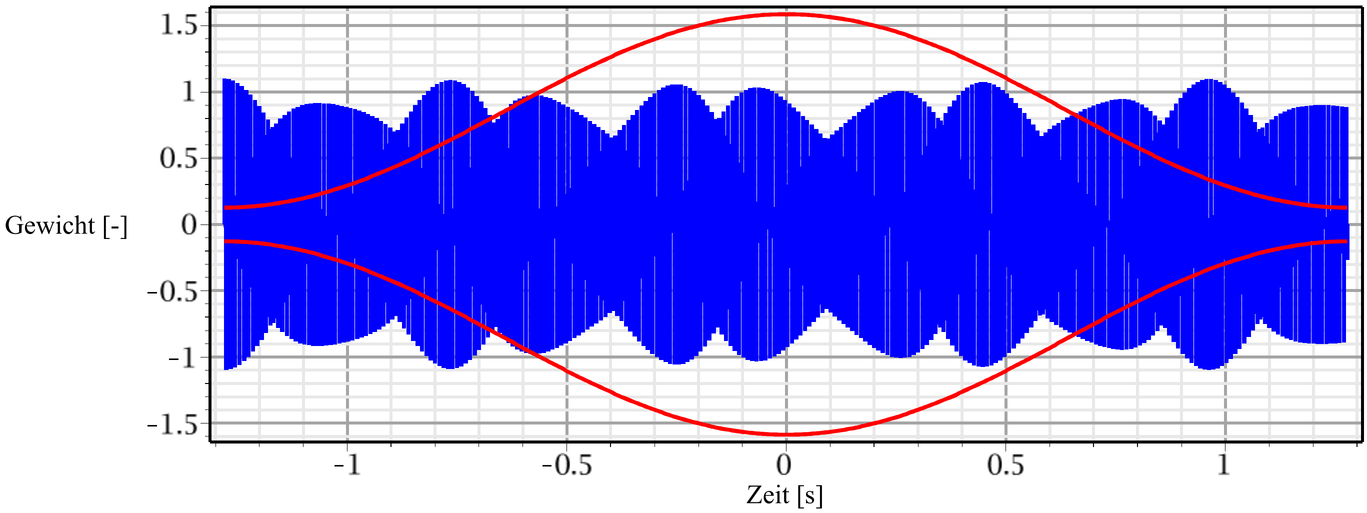

# 6 Picket Fence Effect

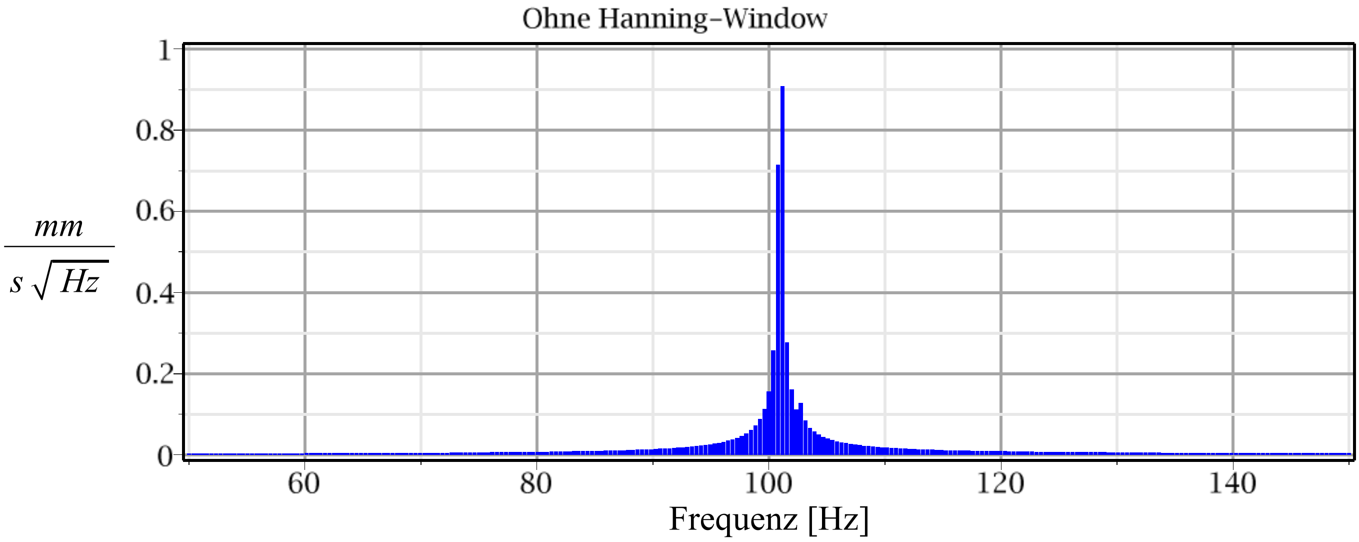
Ein diskretes **Energie-Spektrum** zeigt nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit. Es ist wie ein Blick durch einen Lattenzaun (**Picket Fence**). Man sieht nur, was zwischen den Latten hervor scheint. Da der Abstand zwischen den Frequenz-Linien nur von der Dauer des **Zeitsignals** abhängt, wird eine etwas längere oder kürzere Messung ein anderes, diskretes **Energie-Spektrum** liefern.

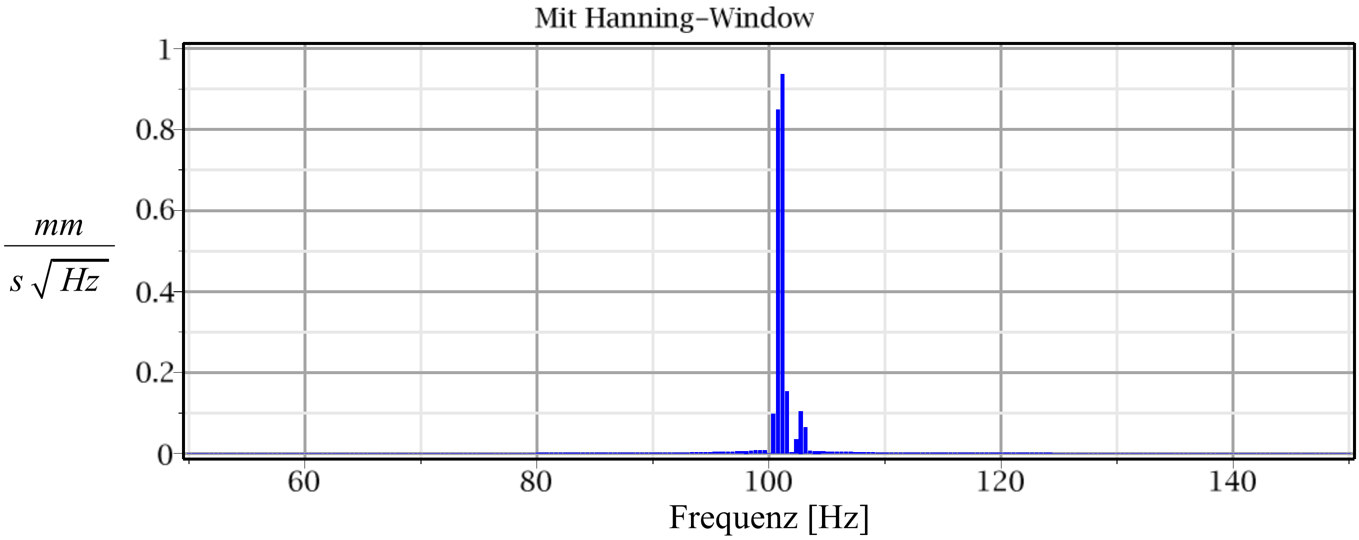


# 7 Leaking und Windowing

Die zeitliche **Beschränkung** der Signale führt zu einer Verbreiterung von Spitzen, d.h. im Spektrum "fliesst" Energie von der Spitze weg; die Spitze "leckt" (Leaking) und wird kleiner. Für ein reines Sinus- oder Cosinus-Signal, dessen Frequenz nicht genau $\frac{n}{T}$ entspricht, ist im schlechtesten Fall **90%** der Energie im Bereich $\pm\frac{1}{T}$ um die Spitze verteilt. Um diesem Effekt zu begegnen, werden stationäre **Zeitsignale** oft mit einem **Fenster** (Window) multipliziert, sodass der Anfang und das Ende des Signals schwächer gewichtet wird als der mittlere Teil. Ein übliches Fenster ist das **Hanning-Window**. Das Fenster ist so normiert, dass die **mittlere Leistung** erhalten bleibt.






Durch das **Hanning-Window** können Spitzen besser identifiziert werden. Für spezielle Anwendungen, zum Beispiel das Berechnen von Transferfunktionen, gibt es auch das das **Hamming**- oder das **Kaiser-Window**. Das üblichste ist das **Hanning-Window**.

## 8 Das Parceval'sche Theorem für diskrete Signale und Spektren

Für den diskreten Fall müssen wir die Integrale durch Summen ersetzen. Es gilt:

$$\frac{1}{f_s} \cdot \sum_{n=1}^{N} s^2(t_n) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{N} S_E^2(|f_n|)$$

Die Summen des **Parceval'schen Theorems** liefern die **Energie**. In den meisten Anwendungen vor allem bei kontinuierlich laufenden Quellen mit einem stationären Signal ist aber die **Leistung** wichtig. So interessiert bei einem **Zeitsignal** meistens der **RMS-Wert** (Root Mean Square). Dieser entspricht der Wurzel der mittleren **Leistung**, nicht der **Energie**. Der Unterschied liegt allein in der Division durch die Dauer des **Zeitsignals**. Analog wird die Wurzel der Energie auch als **RSS-Wert** (Root Sum Square) bezeichnet.

Die Division des **Energie-Spektrums** mit der Dauer T des **Zeitsignals** ergibt so das **Leistungs-Spektrum** $S_P$ mit der Einheit

$\frac{\left(\frac{mm}{s}\right)^2}{Hz}$.

Das **Parceval'sche Theorem** für **Leistungs-Spektren** lautet:

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} s^2(t_n) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{N} S_P^2(|f_n|)$$

# 9 Normierung

| | **Energie-Normierung** | **Leistung-Normierung** |
|---|---|---|
| **Bezeichnung** | –Energie-Spektrum oder<br>–RSS-Spektrum | –Leistung-Spektrum oder<br>–RMS-Spektrum |
| **Einheit** | $\frac{\left(\frac{mm}{s}\right)^2}{Hz^2}$ oder<br>$\frac{\left(\frac{mm}{s}\right)}{Hz}$ | $\frac{\left(\frac{mm}{s}\right)^2}{Hz}$ oder<br>$\frac{\left(\frac{mm}{s}\right)}{\sqrt{Hz}}$ |
| **Parceval'sche Theorem** | $\frac{1}{f_s} \cdot \sum_{n=1}^{N} s^2(t_n) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{N} S_E^2(\lvert f_n \rvert)$ | $\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=1}^{N} s^2(t_n) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=1}^{N} S_P^2(\lvert f_n \rvert)$ |
| **Einzelereignisse** | Die Messdauer hat keinen Einfluss auf die Höhe. | Die Höhe des Spektrums nimmt mit der Messdauer ab. |
| **Stationäre Signale** | Die Höhe des Spektrums nimmt mit der Messdauer ab. | Die Messdauer hat keinen Einfluss auf die Höhe. |

Oft wird (leider) sehr locker mit der Normierung umgegangen:

- Es werden keine Einheiten angegeben, oder fälschlicherweise die Einheit des **Zeitsignals**.
- Es wird die Wurzel des **Leistungs-Spektrums** gebildet und als **Amplituden-Spektrum** bezeichnet
- Es wird die Einheit das „pro Hertz“ vergessen.
- Es werden **Fenster** verwendet, welche die richtige **Normierung** nicht beibehalten.
- Uebrigens: In VIEW ist das Leistungs-Spektrum nicht pro Hertz, sondern pro Linie!

**Bei Unsicherheit empfiehlt sich, das Parceval‘sche Theorem anzuwenden und daraus die Normierung abzuleiten.**

# 10 Merke

- **Ein Fourier-Spektrum ist eine Dichte!**

  Aussagen über die Energie oder die Leistung bei einer bestimmten Frequenz kann nur gemacht werden, indem man einen Frequenz-Bereich des Spektrums gemäss des Parceval'schen Theorems summiert. Bei der Wahl der Breite des Frequenz-Bereichs ist der Leaking-Effekt zu beachten.

- **Der Wert des Fourier-Spektrums bei 0 Hz entspricht dem DC-Offset.**

- **Beim diskreten Fourier-Spektrum eines Zeitsignals der Dauer T beträgt der Abstand der Linien $\frac{1}{T}$.**

- **Ein diskretes Fourier-Spektrum ist nur bis zur halben Abtast-Rate (Aliasing) sinnvoll!**

  Da eine korrekte Messung ein Anti-Aliasing-Filter verwendet, hat das Spektrum keine Anteile über der halben Abtast-Rate.

- **Das diskretes Fourier-Spektrum zeigt nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit (Picket Fence Effect)!**

  Die Höhe der Spitzen verschiedener Spektren zu vergleichen ist extrem fehlerbehaftet, da die Höhe davon abhängt, bei welcher Frequenz sich die Linien des Spektrums befinden. Je länger das Zeitsignale ist, umso dichter liegen die Linien. Für einen seriösen Vergleich müssen Summen über Frequenzbereiche verglichen werden.

- **Man verschaffe sich Klarheit über die Normierung des Spektrums!**

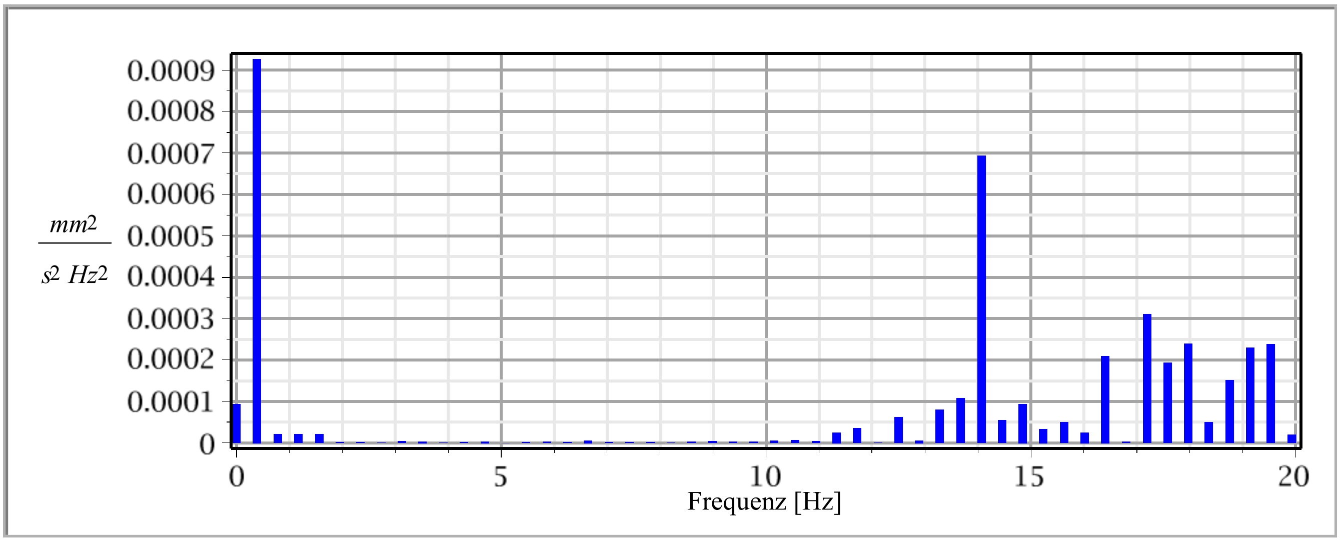
  Uebliche Normierungen sind Energie- oder Leistungs-Normierung oder deren Wurzel.

- **Man wähle die richtige Normierung!**

  Für Einzelereignisse empfiehlt sich die Energie-Normierung; für kontinuierliche Quellen mit stationären Signalen empfihelt sich die Leistungs-Normierung.

- **Bei der Verwendung des Windowing ist Vorsicht geboten!**

  Für Einzelereignisse stimmt die Normierung nach Verwendung des Windowing meistens nicht mehr.




Das diskrete **Energie-Spektrum** hat folgende Eigenschaften:

- Der Abstand zweier Linien des **Energie-Spektrums** beträgt $\frac{1}{T}$, mit T der Dauer das **Zeitsignals**. Die zweite Linie befindet sich bei $f = \frac{1}{T}$.
- Das **diskrete Energie-Spektrum** reicht nur bis zur halben Abtast-Rate.
- Das **diskrete Energie-Spektrum** besteht aus $\frac{N}{2}$ Linien, mit N der Anzahl der in der Zeit T gesammelten Werte.
- Für **Zeitsignale**, die genau $2^n$ Werte umfassen, existiert zur Berechnung des **Energie-Spektrums** ein schneller Algorithmus. Solcherart berechnete Spektren werden auch als **FFT-Spektren** (FFT: Fast-Fourier-Transform) bezeichnet.