Schwingungen von Spannbandbrücken

Jürg Conzett, dipl. Ing. ETH/SIA, Conzett, Bronzini, Gartmann AG, dipl. Ing. ETH/FH, Chur

1. Einleitung

Die Schwingungen von Spannbandbrücken interessieren uns in dreifacher Hinsicht, nämlich zur Beurteilung folgender Punkte:

- Tragsicherheit gegen Vandaleneinwirkung
- Ermüdung
- Komfort der Benutzer

Diese Kriterien beurteilen wir über:

- Trägheitskräfte
- Aufgezwungene Verformungen und entsprechende Zwängungen
- beim Begehen entstehende Beschleunigungen

Um diese Grössen zu bestimmen, benötigen wir Angaben zu:

- Eigenformen und Eigenfrequenzen
- Dämpfung
- Schwingungserregende Einwirkungen

Mit den üblichen Einwirkungen und Lastfaktoren ist die Tragsicherheit gegen Vandaleneinwirkung in der Regel gewährleistet. Die Sicherheit gegen Ermüdung wird durch eine entsprechende konstruktive Gestaltung der Verankerungspunkte erzielt. Der Komfort der Benutzer hängt von verschiedensten Umständen ab und kann nicht einfach „normiert“ werden.

Neben einigen theoretischen Betrachtungen werden diese Aspekte an drei Beispielen von Spannbandbrücken konkretisiert.

2. Drei Beispiele von Spannbandbrücken

Die *Pùnt da Suransuns* (Abb. 1) in der Viamala wurde 1999 erstellt[1]. Sie dient dem alpinen Wanderweg „Via Spluga“ und überspannt den Hinterrhein in der Viamala mit einer Weite von 40 m und einer Gehwegbreite von 85 cm. Das Tragwerk besteht aus vier Duplexstählen mit je einem Querschnitt von 15 x 60 mm, darüber liegen gesägte Platten aus Andeerer Gneis mit 60 x 1100 mm Querschnitt. Die Fugen der Steinplatten sind mit einem 3 mm starken Aluminiumstreifen verfüllt, der dank seinem leichten Kriechvermögen als „trockener Mörtel“ wirkt. Nach dem Verlegen wurden die Steinplatten gegen die Widerlager verschiftet und die Stahlbänder mit je 400 kN vorgespannt. Etwa die Hälfte davon erzeugt eine dauernde Druckkraft im Stein. Diese Vorspannung bewirkt eine stark vergrösserten Steifigkeit der Brücke vor allem gegen horizontale Schwankungen: die vorgespannten Steinplatten verhalten sich so, als wären sie eine einzige grosse Steinplatte von 40 m Länge. Die Pfeilhöhe des Spannbands beträgt 1 m, die ständige Last 2.2 kN/m^2. Die Lage an einem Wanderweg und die meist geringe Zahl sich gleichzeitig auf der Brücke befindlichen Personen machen eine gewisse Intensität von Schwingungen für die Benutzer akzeptabel.

Der *Aaresteg Mülimatt* (Abb.2) ist eine mehrfeldrige Spannbandbrücke (Spannweiten 35 + 35 + 78 + 35 m) mit einem Gehweg aus vorgespanntem Beton, der im Verbund mit vier darunterliegenden Stahlbändern wirkt[2]. Die 2.70 m breite Brücke dient Fussgängern und Radfahrern; sie wurde 2010 eröffnet und führt zum neu erstellten Sportzentrum von Brugg/Windisch. Deshalb wird sie zeitweise von vielen Personen gleichzeitig begangen. Die Betonplatte ist zwischen 18 cm und 22 cm stark, die Stahlbänder messen je 40 x 220 mm im Querschnitt. Die Gehwegplatte enthält 11 Spannkabel mit je 5 Litzen à 150 mm^2, drei davon wirken ohne Verbund und sind nachregulierbar. Das Spannband liegt an allen Auflagern auf Abrollsätteln, die eine zwängungsarme Verformung gewährleisten. Auf den Zwischenstützen ist das Spannband gleitend gelagert, da sonst die Beanspruchungen der Pfeiler in Längsrichtung zu gross würde. Der Durchhang der Hauptöffnung beträgt 1.20 m, die ständige Last entspricht 19 kN/m. Wegen der bisweilen grossen Anzahl Benutzer darf diese Brücke nur in geringem Mass schwingen.

Der *Aaresteg Rupperswil* (Abb. 3) ist eine dreifeldrige Spannbandbrücke mit Spannweiten von 15 + 74 + 13 m. Sie wurde ebenfalls 2010 in Betrieb genommen. Diese Brücke dient ausschliesslich Fussgängern und ihr Gehweg ist deshalb nur 1.20 m breit. Die Spannbänder bestehen aus Flachstählen mit Abmessungen von 30 x 270 mm. Sie sind an ihren Enden mit kurzen Augenstäben gelenkig an massive Wellen angeschlossen. Die Brücke ist für ihre Grösse vergleichsweise leicht, ihre ständige Last beträgt 2.7 kN/m. Der Gehweg aus Lärchenholz liegt auf Längs- und Querträgern, die an den seitlich angeordneten Spannbändern befestigt sind. Die Spannbänder bilden mit den Querträgern und zusätzlichen Diagonalen im Grundriss ein Rautenfachwerk von 2 m Breite, dadurch werden die seitlichen Bewegungen gering gehalten. Die starken Handläufe sind über leicht längs gespreizte Geländerpfosten mit den Gehweg-Längsträgern verbunden, das Geländer wirkt daher statisch als Halb-Vierendeelrahmen, der dank seiner Steifigkeit die kurzwelligen Eigenfrequenzen erhöht. Der Durchhang der Hauptöffnung beträgt 1.20 m. Da ähnlich wie beim ersten Beispiel auf dieser Brücke normalerweise keine grossen Menschenansammlung zu erwarten sind, darf die sichtbar leicht konstruierte Brücke durchaus spürbar schwingen. Eine gleich konstruierte kürzere Spannbandbrücke quert den parallel zur Aare verlaufenden Unterwasserkanal des Kraftwerks Rupperswil-Auenstein zur Gemeinde Auenstein.

3. Tragsicherheit gegen Vandaleneinwirkung

Bei einem Einmassenschwinger erzeugt eine pulsierende Einwirkung in Resonanz eine Trägheitskraft, die um den Faktor $R_{dyn} = 1/(2*\xi)$ grösser als die einwirkende Kraft ist. Dabei ist ξ das Dämpfungsmass. Sein Wert variiert für eine Fussgängerbrücke zwischen etwa 0.5 % und 2.0 %. Bei grossen Schwingungsamplituden nimmt die Dämpfung zu (im Erdbebenfall rechnet man generell mit ξ = 5 %). Der dynamische Vergrösserungsfaktor beträgt also R_{dyn} = 25 bei ξ = 2 % oder R_{dyn} = 10 bei ξ = 5 %. Nehmen wir an, eine Brücke sei mit je einer Person von 80 kg Körpergewicht pro 2 m^2 Brückenfläche belastet und diese Personen würden synchron mit einer Amplitude ihres halben Körpergewichts schwingen. Daraus ergäbe sich dann eine Einwirkung von ½*0.8 / 2 * 25 = 5 kN/m^2 bei ξ = 2 % (resp. ½*0.8 / 2 * 10 = 2 kN/m^2 bei ξ = 5 %). Die Bemessungslast $\gamma_f * q_k = 1.5*4 = 6$ kN/m^2 würde im vorliegenden Fall bei einer Dämpfung von 1.7 % und einem entsprechenden R_{dyn} = 30 erreicht. Die Tragsicherheit hinge in diesem Fall von der schwierig zu ermittelnden Dämpfung im Grenzbereich der Tragsicherheit sowie der Verteilung, Synchronizität und dem destruktiven Durchhaltevermögen der einwirkenden Personen ab.

Die Masse der Konstruktion erscheint nicht in dieser Betrachtungsweise. Die resultierende Trägheitskraft des Systems ist nur von der einwirkenden Kraft abhängig. Bei gleicher Eigenfrequenz und gleicher Dämpfung wird aber eine schwerere Masse eine steifere Feder besitzen und daher geringere Ausschläge und geringere Beschleunigungen als die vergleichbare Leichtbaute aufweisen. Das heisst also, leichte Konstruktionen sind durch Vandalen gefährdeter als schwere. Ist das zutreffend?

Messungen an der Pùnt da Suransuns mit zwei „Vandalen“ ergaben eine Dämpfung von 2.3 %; daraus folgt ein dynamischer Vergrösserungsfaktor von R_{dyn} = 22. Die entsprechende Schwingungsamplitude von +/- 30 mm liess darauf schliessen, dass die Versuchspersonen über längere Zeit eine Kraftamplitude von 20 % ihres Körpergewichts aktivierten. Die maximale Beschleunigung erreichte Werte von 2.63 m/s^2. Die Schwingung war stationär und konnte nicht gesteigert werden. Die im vorigen Abschnitt getroffenen Annahmen wurden also bei weitem nicht erreicht; es leuchtet aber ein, dass bei derartigen Versuchen die Beteiligten eine Hemmung verspüren, die Schwingungen über ein bestimmtes Mass zu steigern.

Prof. Christian Petersen aus München berichtet, dass selbst Vandalen eine Beschleunigung von mehr als etwa a_{dyn} = 0.8*g (entsprechend 8 m/s^2) wegen Angstgefühlen nicht ertragen würden (aber auch die Belastung der Füsse wird beträgt in diesem Fall 180% des Körpergewichts)[3]. Die maximale Beschleunigung $\hat{a}_{dyn}$ erzeugt entsprechende Trägheitskräfte in der ständigen Masse der Brücke, die zur massgebenden Grösse werden, da die statische Personenlast vergleichsweise gering ist. Für die oben angenommene Personenverteilung von 0.4 kN/m^2 ergeben sich folgende Bemessungsfälle:

„leichte“ Brücke, g = 2 kN/m^2:

dynamisch:	q_{dyn}	= R_{dyn}*(g + p)	= 1.8 * (2 + 0.4)	= 4.32 kN/m^2
statisch:	q_d	= 1.35*g + 1.5*p	= 1.35*2 + 1.5*4	= 8.70 kN/m^2

„schwere“ Brücke, g = 7 kN/m^2:

dynamisch:	qdyn	= Rdyn*(g + p)	= 1.8 * (7 + 0.4)	= 13.32 kN/m2
statisch:	qd	= 1.35*g + 1.5*p	= 1.35*7 + 1.5*4	= 15.45 kN/m2

Beide Fälle sind durch die statischen Einwirkungen abgedeckt; verglichen mit der ersten Berechnungsart besitzen nun aber schwere Konstruktionen eine geringere Tragreserve, Unterschiede in der „Dichte“ der Vandalen wirken sich bei dieser beschleunigungsorientierten Betrachtung weniger stark aus.

Ein weiteres Zahlenbeispiel kann den Vergleich der beiden Ansätze illustrieren: Drei unterschiedlich schwere Brücken, alle mit einer Grundfrequenz von f = 2 Hz und einer Dämpfung von 1 % seien dem Lastfall von 10 Vandalen à 80 kg mit halbem schwingendem Körpergewicht ausgesetzt.

	Eigene Masse M_g to	Personen-masse M_q to	Totale Masse M to	Feder-konstante k kN/m	Statische var. Kraft $F_{var,max}$ kN	R_{dyn}	Dyn var. Kraft $F_{dyn,max}$ kN	Stat. Kraft (tot. Masse) M*g kN	Max. Feder-kraft $F_{dyn,max}$+M*g kN	Amplitude w_{max} m	max. Beschleunig. â m/s^2	Trägh.kraft M*â kN
Brücke 1	5.00	0.80	5.80	916	4	50.0	200.0	58	258.0	0.218	34.48	200.0
			5.80		4	11.6	46.4	58	104.4	0.051	8.00	46.4
Brücke 2	25.00	0.80	25.80	4074	4	50.0	200.0	258	458.0	0.049	7.75	200.0
			25.80		4	51.6	206.4	258	464.4	0.051	8.00	206.4
Brücke 2	50.00	0.80	50.80	8022	4	50.0	200.0	258	458.0	0.025	3.94	200.0
			50.80		4	101.6	406.4	258	664.4	0.051	8.00	406.4

In dieser Tabelle werden die Werte der ersten Zeile pro Brücke von links nach rechts entwickelt: $\omega = 2\pi * f = 12.57\ s^{-1}$; Federkonstante $k = \omega^2 * M$; Amplitude $w_{max} = F_{dyn,max} / k$; max. Beschleunigung $\hat{a} = w_{max} * \omega^2$. Die zweite Zeile rechnet von der gegebenen maximalen Beschleunigung an rückwärts nach links.

Tabelle 1: Vergleich zweier unterschiedlich schwerer Brücken von gleicher Eigenfrequenz und Dämpfung

Fazit: unter gleichen schwingenden Einwirkungen erzeugen alle Brücken dieselben Trägheitskräfte, aber mit ganz unterschiedlichen Schwingungsamplituden und Beschleunigungen. Bei der leichtesten Brücke entstehen unrealistische Beschleunigungen, die von den Vandalen nicht mehr aufgebracht werden können, hier erscheint der Grenzwert von 0.8 * g eine sinnvolle obere Grenze. Bei der schwersten Brücke kann dieser Wert aber auch in Resonanz nicht aufgebracht werden, hier wäre der erste Berechnungsansatz mit realistisch abgeschätzter Vandalenzahl und mit durch Messung überprüfter Dämpfung möglich.

4. *Sicherheit gegen Ermüdung im Auflagerbereich*

Die konstruktive Ausbildung der Verankerungen ist zentral für die Sicherheit gegen Ermüdung. In den hier behandelten drei Beispielen wurden als konstruktive Massnahmen *Blattfedern*, *Abrollflächen* und *Gelenke* verwendet.

Blattfedern eignen sich dann, wenn die Zugglieder des Spannbands aus Flachstählen bestehen. Sie benötigen Auflager von einer gewissen Länge. Zu ihrer Dimensionierung müssen Grenzfälle mit oder ohne Reibung zwischen den Lamellen betrachtet werden.

Bei der Pùnt da Suransuns wurde der Ermüdungsnachweis für eine wiederholte dynamische Einwirkung von max. 0.6*g in der ersten Eigenform (antimetrische Schwingung mit zwei Halbwellen geführt). Dabei wurde aus einer Berechnung am biegeweichen Seil ein Knickwinkel von 2.2 % am Auflager bestimmt. Die unterschiedlichen statischen Modelle der Auflagerpartie wurden mit diesem Knickwinkel als Zwängung belastet (Abb. 4). Dabei zeigte erwartungsgemäss das homogene Modell mit fiktiver starrer Verbindung zwischen den Lamellen die grössten Biegespannungen ($\Delta\sigma_{Stahl}$ = +/-48 MPa). Die tatsächlichen Verhältnisse sind sicher günstiger. Die Normalkraft bleibt bei diesem antimetrischen Lastfall annähernd konstant. Für die Endverankerung der Stahlbänder massgebender ist deshalb der Fall der symmetrischen Eigenform mit 0.6 g. Bei vergleichsweise geringen Knickwinkeln von 0.3 % wächst hier die Horizontalkomponente der Zugkraft von 440 kN auf 630 kN. Dieses Anschwellen der Zugkraft wird im Verbundquerschnitt von vorgespanntem Gneis und Stahl vor allem durch den Stein aufgenommen (Abb. 5). Für den Nachweis wurde der E-Modul des Steins wegen der Fugen auf die Hälfte abgemindert (E_{gneis} = 22'000 MPa), daraus ergab sich an den Endverankerungen eine variable Stahlspannung von $\Delta\sigma_{Stahl}$ = +/- 17 MPa.

Der Aaresteg Mülimatt weist an seinen Auflagern Abrollflächen auf. Eine nach unten gerichtete Verformung des Spannbandes führt zu einem einfach berechenbaren Spannungszustand, der Biegeradius ist ja gegeben. Schwieriger zu analysieren ist die gegenteilige Bewegung nach oben, die bedeutender ist, denn das Spannband verkürzt und hebt sich infolge Vorspannung, Schwinden und Kriechen. Der Kontaktpunkt mit dem Sattel verschiebt sich in Richtung der Auflagermitte an einen nicht zum vorneherein bekannten Ort. Zuvorderst löst sich das Spannband vom Sattel und dadurch entstehen positive Biegemomente. Beim Betonieren wurde ein Wendepunkt eingeprägt, der aber in Bezug auf die Biegelinie kein Wendepunkt ist: es treten nur positive Biegemomente auf. Schwinden und Kriechen erzeugen beim Mülimatt-Steg einen Knickwinkel von 2.6 % nach oben, ein Temperaturfall von 20° vergrössert ihn um weitere 0.7 %. Eine Halbwellenschwingung mit einer Amplitude von 0.5 g bewirkt eine Winkeländerung von +/- 1.04 %. Die entsprechenden Spannungen betragen $\Delta\sigma_{Stahl}$ = +/- 86 MPa an der Unterkante des Stahlbands (Abb. 6).

Die Gelenke des Aarestegs Rupperswil sind konstruktiv ideal, wenn Knicke im Gehweg akzeptiert werden können. Auf den Köpfen der Schrägstiele sind die Stahlwellen sehr platzsparend. Da die Richtung der einwirkenden Kräfte um geringe Winkel schwankt und eine Lastumkehr ausgeschlossen ist, wurden die Löcher der Augenstäbe mit einem zu den Wellen 5 mm grösseren Durchmesser ausgefräst. Dieses Lochspiel sorgt für eine reibungsfreie Winkeländerung. Damit treten im Auflagerbereich keine besonderen Ermüdungsfragen auf, der Ermüdungsnachweis beschränkt sich auf die Normalkraftänderungen in den Spannbändern. Ein Korrosionsschutz in den „Augen" könnte nie erneuert werden; deshalb hat man diese in Edelstahl ausgeführt und in den Stirnplattenstössen gegenüber den Spannbändern elektrisch isoliert. Besondere Präzision in der Herstellung der Augen war nötig, um eine im Grundriss genau rechtwinklige Lage zu den Wellen zu gewährleisten, da die beiden Laschen sonst unregelmässig beansprucht werden könnten (Abb. 7).

5. *Komfort der Benutzer bei Schwingungen des Tragwerks*

Seitliche Schwingungen:

Seitliche Schwingungen sind wesentlich unangenehmer als vertikale; sie müssen durch Gegenbewegungen des Körpers aufgefangen werden, was unweigerlich den „Lock-in-Effekt" erzeugt, der die Schwingung zusätzlich anfacht. Horizontale Schwingungen müssen aus diesem Grund in jedem Fall eine Eigenfrequenz > 1.3 Hz aufweisen.

Die hier betrachteten Spannbänder bilden in Querrichtung einen beidseits eingespannten einfachen Balken, dessen Eigenfrequenz einfach von Hand abgeschätzt werden kann. Wegen des Durchhangs des Spannbands entstehen in den Viertelspunkten der Spannweite Drehmomente, die entweder durch Umlauftorsion (bei vollen Querschnitten) oder Wölbtorsion (ein vertikales Kräftepaar in den Spannbändern bei offenen Querschnitten) aufgenommen werden. Stellt man sich die Spannbandbrücke um ihre Längsachse um 90° gedreht vor, ergibt sich die Analogie zu einem im Grundriss gekrümmten Brückenträger. Da alle drei Spannbänder einen flachen Durchhang mit einer hohen Zugkraft aufweisen, treten unter Seitenwind oder seitlichen Schwingungen keine Kippprobleme des Querschnitts auf. Die Torsionseffekte haben auf die Eigenschwingung einen leicht versteifenden Einfluss, die effektiven Werte sind daher etwas höher als die am eingespannten Balken errechneten (Abb. 8).

Vertikale Schwingungen:

Auf vertikale Schwingungen reagieren Menschen gutmütig, wenn sie auf das Auftreten von Schwingungen vorbereitet sind. Die Pùnt da Suransuns ist schmal und schlank und die Benutzer empfinden die Schwingungen beim Betreten als selbstverständlich. Beim Aaresteg Rupperswil gilt dies ebenso, zudem wird die Beweglichkeit der Brücke durch die auffälligen Gelenke besonders augenfällig. Der breite und schwerere Aaresteg Mülimatt neigt dank seiner Masse und der hohen Zugkraft weniger zum Schwingen.

Ein Mass für den Komfort ist die maximale vertikale Beschleunigung der Konstruktion, die während des Begehens auftritt. Um sie zu bestimmen, sind wir zunächst auf die Kenntnis der Eigenfrequenzen und vertikalen Eigenformen angewiesen. Diese können an sich leicht mit gängigen Computerprogrammen bestimmt werden. Will man sich jedoch nicht gänzlich der Black Box ausliefern, muss man über unabhängige Methoden zur Lösung dieser Aufgabe verfügen. Ein gutes Modell hiefür ist dasjenige des biegeweichen Seils.

Exkurs: 1., 2. und 3. Ordnung:

Ähnlich wie bei den Hängebrücken müssen die Seile nach der Theorie zweiter oder dritter Ordnung behandelt werden, um zutreffende Resultate zu erhalten. Berechnungen zweiter Ordnung ermitteln die Schnittkräfte am verformten System mit denjenigen (konstanten) Normalkräften, die eine Berechnung erster Ordnung liefert; Berechnungen dritter Ordnung berücksichtigen auch die Veränderung der Normalkräfte durch die Verformung des Systems.

Ein illustratives Beispiel dazu: ein ursprünglich horizontales linear-elastisches Kabel wird in der Mitte nach unten gezogen. Daraus ergibt sich eine einfach zu bestimmende nichtlineare Weg-Kraft-Beziehung. Die Ableitung der Kraft nach dem Weg entspricht der Federkonstanten des Systems (Abb. 9).

Die Eigenformen und Eigenfrequenzen linearer Schwingungen können immer mit sehr kleinen Amplituden bestimmt werden. Daher ist eine Schwingungsberechnung nach zweiter Ordnung um eine realistische Gleichgewichtslage für unsere Bedürfnisse genügend genau. Die Gleichgewichtslage selbst soll aber nach dritter Ordnung bestimmt werden. Dies kann auch mit einem „normalen" Computerprogramm geschehen, wenn die geometrische Soll-

Lage des Spannbands eingegeben wird und die ständige Last iterativ solange mit Vordehnungen des Spannbands überlagert wird, bis eine Verformung von Null entsteht.

Unser Büro besitzt auch ein selbst geschriebenes Tabellenkalkulationsprogramm, das das Seilpolygon eines durch beliebige Kräfte belasteten biegeweichen Seils unter einer wählbaren Horizontalkomponente der Seilkraft bestimmt und gleichzeitig dessen Länge unter Berücksichtigung der elastischen Veränderungen aufsummiert. Durch Herstellen der geometrischen Verträglichkeit an den Auflagerpunkten (durch die „Solver"-Funktion) können dadurch Verformungen auf eine anschauliche Art berechnet werden. Da immer reale Seilpolygone betrachtet werden und nicht Differenzen zu andern Zuständen, sind Effekte dritter Ordnung in diesen Berechnungen immer bereits eingerechnet, mit der Einschränkung, dass davon ausgegangen wird, dass sich die Angriffspunkte der Kräfte nur lotrecht verschieben.

Bestimmen der vertikalen Eigenfrequenzen und Eigenformen:

Antimetrische Schwingungsformen von flachen biegeweichen Spannbändern können nach der Analogie einer gespannten Saite leicht von Hand bestimmt werden (Abb. 10). Die Werte sind immer etwas zu tief:

Erste antimetrische Schwingungsfrequenz in Hz

	Saitenschwingung	Biegesteifer Stab	Messung	Bemerkungen
Suransuns	1.12	1.32	1.49	Elastizitätsmodul der vorgespannten Steine?
Mülimatt	1.10	1.20	1.16	Abstand der Abrollpunkte?
Rupperswil	1.02	1.10	1.12	

Tabelle 2: Gerechnete und gemessene antimetrische Eigenformen

Erste symmetrische Schwingungsfrequenz in Hz

	Seil	Biegesteifer Stab	Messung
Suransuns	1.55	nicht möglich	nicht möglich
Mülimatt	1.01	0.78	0.84
Rupperswil	1.00	1.10	1.07

Tabelle 3: Gerechnete und gemessene symmetrische Eigenformen

Für die symmetrischen Eigenformen geht man von der gleichen Differenzialgleichung aus, die auch zur Berechnung von Hängebrücken benutzt wird, die Lösung ist über eine transzendente Gleichung möglich (Abb. 11)[4]. Die Unterschiede zur Messung sind deutlich.

Durch gehende Personen induzierte Beschleunigungen:

Exkurs: modale Massen:

Jede Verformung eines Systems mit n Freiheitsgraden kann durch eine eindeutige lineare Kombination der n Eigenformen ausgedrückt werden. Dasselbe gilt für Krafteinwirkungen. Jeder Eigenform entspricht eine sie produzierende Konfiguration äusserer Kräfte. Beliebige äussere Kräfte müssen auf diese Eigenform-Komponenten zerlegt werden. Eine einfache Möglichkeit bietet der Energievergleich: die äussere Energie der äusseren Kräfte auf eine bestimmte Eigenform mit einem bestimmten Ausschlag muss der inneren Energie derselben Eigenform entsprechen. Da die äussere Energie linear mit der Amplitude der Eigenform wächst, die innere Energie jedoch quadratisch, ergibt sich ein eindeutiger Wert für den Ausschlag der Eigenform. Wiederum gilt dasselbe für die Kraftwirkungen.

Beispiel: der einfache Balken schwingt in der ersten Eigenform mit einer sinusförmigen Biegelinie $w = w_0 \sin(\pi x/l)$. Die innere Energie dieser Eigenform entspricht $E_i = ¼ * \pi^4 * EI / l^3 * w_0^2$. Wenn die Schwingung durch eine einzelne Kraft F in Feldmitte angeregt wird, beträgt die äussere Energie auf die erste Eigenform $E_a = ½ * F * w_0$. Durch Gleichsetzen ergibt sich $w_0 = 2 / \pi^4 * Fl^3 / EI$ (diese Verformung ist nicht gleich der effektiven Verformung von $w_{eff} = 1/48 * Fl^3 / EI$, sondern leicht geringer, sie gibt den Anteil der ersten Eigenform an der Gesamtverformung an, was in diesem Beispiel dem ersten Anteil einer Fourier-Zerlegung entspricht).

Wenn wir den Verformungsanteil einer bestimmten Eigenform am Angriffspunkt der äusseren Last kennen, können wir für diesen Fall einen Einmassenschwinger modellieren, der eine modale Federsteifigkeit $k_{modal} = F/w_{F,i}$ (w an der Stelle von F für die Eigenform i) und eine modale Masse $M_{modal} = \omega^2 * F/w_{F,i}$ besitzt.

Oft liefern Computerprogramme „massennormierte“ Eigenformen $\phi(x)$ bei denen gilt, dass $S = \int m\, \phi^2\, dx = 1$ ist. Wenn wir die äusseren Kräfte nach dem Prinzip von d'Alembert mit $\omega^2\, m\, \phi$ ansetzen, wird die innere Energie für diese Eigenform $E_i = ½ * \omega^2 S$. Eine äussere Kraft F an der Stelle x_F erzeugt gerade diese Biegelinie, wenn $½\, F * \phi(x_F) = ½ * \omega^2 S$ oder $F = \omega^2 S / \phi(x_F)$ ist. Die modale Federsteifigkeit ist dann $k_{modal} = \omega^2 S / \phi^2(x_F)$ und die modale Masse wird $M_{modal} = S / \phi^2(x_F)$, also eigentlich $M_{modal} = 1 / \phi^2(x_F)$ bei einheitlich definierten Masseinheiten.

Beschleunigungen, durch eine einzige gehende Person induziert:

Der Anteil c des Körpergewichts, der schwingt, entspricht etwa folgenden Werten[5]:
f = 1.5 Hz: c = 0.24
f = 2.0 Hz: c = 0.4
f = 2.5 Hz: c = 0.5

Eine stationäre Bewegung an einer bestimmten Stelle bewirkt eine maximale Beschleunigung von $c*F / M_{modal} * 1/(2\xi)$. Nun ist die Anregung einer Person aber nicht stationär, da sich diese Person über die Brücke hinweg bewegt. Ebenfalls ist der Faktor $1/(2\xi)$ in vielen Fällen zu hoch, da die Anzahl anregender Schwingungen durch das Überqueren der Brücke begrenzt bleibt.

Betrachten wir die variable Lage der Last anhand der Einflusslinie des Mittelauflagers eines Zweifeldträgers, erhalten wir eine gemittelte Anregung von 0.625 F. Ein alternatives Modell, das die Anregung der ersten Eigenform unter F(x) proportional zu $k_{modal}(x)$ setzte, würde zu 0.500 F führen.

Unter einer konstanten (wie vorher gemittelten), aber zeitlich auf die Dauer t_s begrenzten Anregung beträgt der dynamische Vergrösserungsfaktor $R_{dyn} = (1 – e^{-\xi\omega ts}) * 1/(2\xi)$, also wird die maximale Beschleunigung unter einer Person

$$\hat{a} = 0.625 * c*F / M_{modal} * (1 – e^{-\xi\omega ts}) * 1/(2\xi)$$

worin t_s die Dauer des Überquerens der Brücke bedeutet. Beispiele siehe Abb. 11.

Gruppeneffekte:

Für den Gruppeneffekt wird ausserhalb des Bereichs zwischen 1.6 und 2.4 Hz mit einem pauschalen Vergrösserungsfaktor m = 2.0 gerechnet, zwischen 1.8 und 2.2 Hz entspricht der Faktor nach einigen Umrechnungen der Wurzel aus der Anzahl Personen, die sich gleichzeitig auf der Brücke befinden[6]. Dazwischen lässt sich linear interpolieren.

Dies führt zu folgenden maximalen gerechneten Beschleunigungen:

Suransuns:	m = 2	â = 1.43 m/s^2
Mülimatt:	m = Wurzel(40)	â = 1.25 m/s^2 (40 Personen sind eine Annahme)
Rupperswil:	m = Wurzel(20)	â = 3.80 m/s^2

Gemessen wurden folgende Werte[7]:

	Frequenz Hz	Dämpfung %	Beschleunigung, gehend 2 Personen m/s²	4 Personen m/s²	8 Personen m/s²	B., rennend 4 Personen m/s²	mutwilliges Aufschaukeln m/s²
Suransuns	1.49	2.3					2.63
Mülimatt	1.86	0.2 … 0.5		0.54		0.33	0.97
Rupperswil	1.73	0.9	1.19		1.86	3.43	3.90

Tabelle 4: Gemessene Beschleunigungen

Es war ursprünglich geplant, die Aarebrücke Rupperswil mit Schwingungstilgern auszustatten. Versuche an der provisorisch montierten Brücke in der Werkstatt des Stahlbauers und die Erfahrung im Betrieb zeigten, dass trotz hoher Beschleunigungen auf diese Tilger verzichtet werden konnte. Die Schwingungen werden von den Passanten akzeptiert. Es zeigt sich, dass psychologische Faktoren das Komfortgefühl auf „lebendigen" Brücken wesentlich mitbeeinflussen.

[1] Conzett, Jürg: *Pùnt da Suransuns*, in: Schweizer Ingenieur und Architekt Nr. 1/2, 11. Jan. 2000, S. 2 ff.
[2] Bronzini, Gianfranco: *Spannband über die Aare*, in: tec 21 Nr. 40, 2010, S. 27 ff.
[3] Petersen, Christian: *Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau*, München 2001, S. 121
[4] Petersen, Christian: *Dynamik der Baukonstruktionen*, Braunschweig/Wiesbaden 1996, S. 457
[5] Bachmann, Hugo u.a.: *Vibration problems in structures*, Basel 1997, S. 190
[6] Matsumoto, Y, u.a.: *Dynamic Design of Footbridges*, IABSE Proceedings No. P17-18, 1978, S. 1 ff.
[7] Ziegler, Armin: *Schwingungsmessungen auf der neuen Aarebrücke in Windisch* und *Schwingungsmessungen auf der neuen Aarebrücke in Rupperswil,* Ziegler Consultants, Zürich 2010.
Siehe auch: Dietschweiler, Roger: *A comparison of three different systems of stress ribbon bridges*, erscheint in IABSE im Herbst 2011.