

# Grundlagen der Bauwerksdynamik

## 1 Einleitung

Der Bauingenieur ist in der Regel dafür besorgt, dass seine Bauwerke die Lasten zuverlässig und mit genügender Sicherheit aufnehmen können und sich dabei nichts bewegt. Wenn sich unter statischer Belastung etwas bewegt, ist meistens etwas nicht mehr ganz gut. In der Baudynamik hingegen gehen wir davon aus, dass die Bauwerke sich bewegen dürfen. Solange diese Bewegungen im vorgesehenen Rahmen bleiben und weder für die Sicherheit des Bauwerkes noch für das Wohlbefinden der Menschen ein Problem darstellen, hat alles seine Richtigkeit. Da wir in der Dynamik die Lasten als zeitlich variable Grössen einführen müssen und die dadurch ausgelösten Bewegungen der Tragstruktur berechnen wollen, werden die Berechnungsabläufe häufig etwas kompliziert. Dazu kommt, dass unser Vorstellungsvermögen zwar bei statischen Problemstellungen recht gut funktioniert, bei dynamischen Aufgaben uns jedoch häufig im Stich lässt, da Schwingungen von Tragwerken nicht zum alltäglichen Erfahrungsbereich gehören.

Trotz alledem lässt sich ein grosser Teil der dynamischen Aufgabenstellungen mit erstaunlich einfachen Mitteln mit ausreichender Genauigkeit lösen. Dieses „einfache“ Hilfsmittel ist die Theorie des Ein-Massen-Schwingers. Sicher sind auch darin einige nicht ganz triviale mathematische Hürden zu bewältigen. Doch weil die daraus resultierenden Formulierungen sehr kurz und elegant sind und uns überdies erlauben, für die meisten in der Baudynamik auftretenden Problemstellungen rasch eine approximative Lösung zu gewinnen, lohnt sich der Aufwand, sich in diese Theorie einzuarbeiten. Der vorliegende Beitrag versucht eine leicht verständliche Einführung in die Theorie des Ein-Massen-Schwingers zu geben. Die Ausführungen basieren zu einem wesentlichen Teil auf dem Lehrbuch „Dynamics of structures“ von Prof. R.W. Clough und Prof. J. Penzien, einem Lehrbuch, das immer noch zu den Besten auf dem Gebiet der Bauwerksdynamik gehört. Zur Illustration der Theorie wird anhand von Beispielen aus der Praxis aufgezeigt, wo und wie diese Theorie in der Praxis zur Anwendung kommt und wie gut oder schlecht die Übereinstimmung ist.

## 2 Der Ein-Massen-Schwinger

Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften eines elastischen Tragsystems unter dynamischer Beanspruchung sind seine Masse, seine elastischen Eigenschaften (Steifigkeit), die Art des Energieverlusts (Dämpfung) und die Krafteinwirkung. In seiner einfachsten Form besteht ein solches System, wie in Bild 2.1 dargestellt, aus einer Masse, einer Feder und einem Dämpfungselement. Anhand eines solchen Systems lassen sich die wesentlichsten Eigenschaften eines schwingenden Systems herleiten.

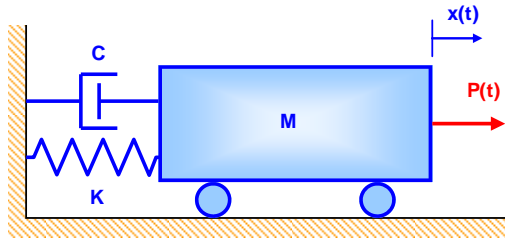
### 2.1 Formulierung der Bewegungsgleichung

Der Ein-Massen-Schwinger in Bild 2.1 ruht auf reibungslosen Rollen und kann somit nur eine horizontale Bewegung ausführen. Die Position der Masse wird durch  $x(t)$ , d.h. durch die  $x$ -Koordinate als Funktion der Zeit, angegeben. Eine zeitlich variable Kraft  $P(t)$  wirkt in  $x$ -

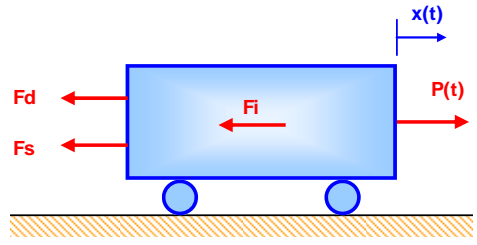
Richtung. Um nun die Bewegungsgleichung für ein solches System herzuleiten, gibt es verschiedene Methoden. Die anschaulichste ist sicherlich die Gleichgewichtsbetrachtung.

### 2.1.1 Gleichgewichtsbetrachtung

Die Kräfte, die auf die Masse  $M$  (in Bild 2.1) wirken sind in Bild 2.2 dargestellt. Wir beschränken uns auf die Kräfte in  $x$ -Richtung, da wir die Bewegungsgleichung in  $x$ -Richtung formulieren wollen. Die positive Richtung der Kräfte wurde bewusst in Richtung der negativen Kraftwirkung gewählt, da sie der Kraft entgegenwirken.



**Bild 2.1** Einmassenschwinger



**Bild 2.2** Kräfte beim Einmassenschwinger

### 2.1.2 Anregung durch äussere Kraft

Die Gleichgewichtsbetrachtung führt uns somit zu Gleichung (2.1):

$$F_i + F_d + F_s = P(t) \quad (2.1)$$

Betrachten wir zuerst die elastische Kraft  $F_s$ . Sie ist offensichtlich gegeben durch das Produkt von Federsteifigkeit  $K$  und Verschiebung gegenüber der Ruheposition, d.h. durch die Gleichung (2.1a):

$$F_s = K \cdot x \quad (2.1a)$$

Die Trägheitskraft  $F_i$  entspricht dem Produkt aus Masse und Beschleunigung, d.h.:

$$F_i = M \cdot \ddot{x} \quad (2.1b)$$

Als Dämpfungsmechanismus nehmen wir einen viskosen Dämpfer an. Dann ist die Dämpfungskraft gegeben durch das Produkt von Dämpfungskonstante  $C$  und Geschwindigkeit, d.h. durch Gleichung (2.1c):

$$F_d = C \cdot \dot{x} \quad (2.1c)$$

Wenn wir nun die drei Gleichungen (2.1a bis c) in Gl. (2.1) einführen, erhalten wir die Bewegungsgleichung des Ein-Massen-Schwingers in der Form von Gl. (2.2):

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = P(t) \quad (2.2)$$

## 2.2 Freies Ausschwingen

Wir betrachten als erstes den Fall des „freien Ausschwingens“, d.h. die Masse  $M$  in Bild 2.1 wird aus einer bestimmten (ausgelenkten) Ausgangslage sich selbst überlassen. Die Gleichung (2.2) reduziert sich, da keine äussere Kraft  $P(t)$  wirkt, zu:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (2.3)$$

d.h. es wirken nur noch die Trägheitskraft, die Dämpfungskraft und die Federkraft. Diese drei Kräfte sind bestimmt durch die Grösse  $x$  bzw. deren 1. und 2. Ableitung nach der Zeit.

### 2.2.1 Lösung der Bewegungsgleichung

Die Lösung der Bewegungsgleichung (2.3) finden wir mit Hilfe eines geschickten Ansatzes (im englischen treffend als „educated guess“ bezeichnet) in der Form von:

$$x(t) = Ge^{rt} \quad (2.4)$$

Damit ergeben sich für die 1. und 2. Ableitung von  $x(t)$  nach  $t$  die Ausdrücke:

$$\dot{x}(t) = Gre^{rt} \quad (2.4a)$$

$$\ddot{x}(t) = Gr^2e^{rt} \quad (2.4b)$$

Setzen wir diese drei Ausdrücke in Gleichung (2.3) ein, so erhalten wir Gleichung (2.5):

$$(Mr^2 + Cr + K)Ge^{rt} = 0 \quad (2.5)$$

Wir dividieren Gl (2.5) noch durch  $Ge^{rt}$  und  $M$  und erhalten:

$$r^2 + \frac{C}{M}r + \frac{K}{M} = 0 \quad (2.6)$$

Wenn wir nun noch die Grösse  $\omega$  in der Form von:

$$\omega^2 = \frac{K}{M} \quad (2.7)$$

einführen, so erhalten wir die Bewegungsgleichung in einer sehr einfachen Form:

$$r^2 + \frac{C}{M}r + \omega^2 = 0 \quad (2.8)$$

Die Grösse  $\omega$  wird, wie wir weiter unten bald sehen werden, eine wichtige Bedeutung für die Beschreibung eines schwingenden Systems erhalten.

### 2.2.2 Ungedämpfte freie Schwingung

Ist unser System ungedämpft, d.h.  $C = 0$ , so reduziert sich Gl. (2.3) auf:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (2.9)$$

Entsprechend vereinfacht sich Gl. (2.8) zu:

$$r^2 + \omega^2 = 0 \quad (2.10)$$

und die Lösung für  $r$  ist gegeben durch:

$$r = \pm i\omega \quad (2.11)$$

Diese Lösung (oder besser: diese beiden Lösungen) setzen wir nun wieder in unseren Ansatz von Gleichung (2.4) ein und erhalten:

$$x(t) = G_1 e^{i\omega t} + G_2 e^{-i\omega t} \quad (2.12)$$

Die beiden Grössen  $G_1$  und  $G_2$  sind zwei vorderhand noch unbestimmte Konstanten, die sich erst durch die Anfangsbedingungen ergeben werden. Gleichung (2.12) kann durch Verwendung der Euler-Gleichung

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (2.13)$$

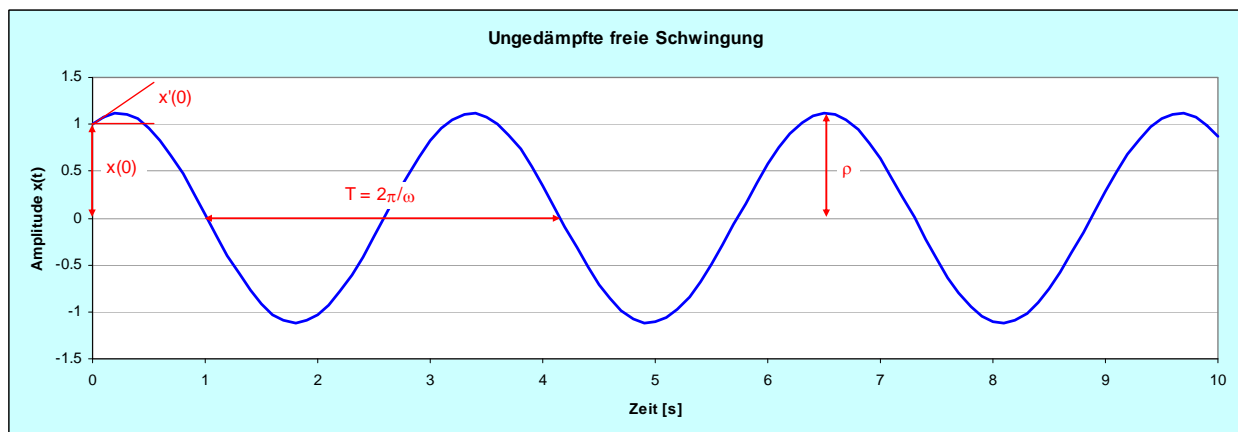
in eine anschaulichere Form gebrachte werden. Wir erhalten dadurch die Bewegungsgleichung in der Form von:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.14)$$

Die beiden Konstanten  $A$  und  $B$  können wir in Form von Anfangsbedingungen ausdrücken, d.h. durch die Verschiebung  $x(0)$  und die Geschwindigkeit  $\dot{x}(0)$  zur Zeit  $t = 0$ , welche die Schwingung unseres Systems ausgelöst haben. Indem wir in Gl. (2.14)  $t = 0$  einsetzen erhalten wir  $B = x(0)$  und  $A = \dot{x}(0)$ . Damit ergibt sich aus Gl. (2.14) die Bewegungsgleichung:

$$x(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t + x(0) \cos \omega t \quad (2.15)$$

Diese Bewegungsgleichung stellt eine harmonische Schwingung dar, wie sie in Bild 2.3 dargestellt ist. Die Grösse  $\omega$  stellt dabei die Winkelgeschwindigkeit dar und wird in rad/s angegeben.



**Bild 2.3** Ungedämpfte freie Schwingung mit  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ,  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 1$

Gebräuchlicher als die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist die Frequenz  $f$ , d.h. die Anzahl Perioden pro Sekunde. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Grössen ist gegeben durch:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.16)$$

Die Dauer einer Schwingung (in Bild 2.3 mit  $T$  angegeben) entspricht dem Kehrwert von  $f$  und berechnet sich dementsprechend nach:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad (2.17)$$

### 2.2.3 Gedämpfte freie Schwingung

Weist unser System in Bild 2.2, was in Realität auch stets der Fall ist, eine gewisse Dämpfung auf, so lautet unsere Gleichgewichtsbedingung:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (2.18)$$

und wir haben die Bewegungsgleichung (2.19) zu lösen:

$$r^2 + \frac{C}{M}r + \omega^2 = 0 \quad (2.19)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung ist gegeben durch:

$$r = -\frac{C}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2M}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.20)$$

wobei wir, je nach dem Wert unter der Wurzel, drei verschiedene Lösungen unterscheiden können:

- Fall 1: Der Wert unter der Wurzel ist Null. Dies entspricht der so genannten kritischen Dämpfung.
- Fall 2: Der Wert unter der Wurzel ist grösser als Null. Dies entspricht der überkritischen Dämpfung.
- Fall 3: Der Wert unter der Wurzel ist kleiner als Null. Dies entspricht der unterkritischen Dämpfung.

### Kritisch gedämpftes System

Damit der Wurzelausdruck in Gl. (2.20) gleich Null wird, muss  $C/2M = \omega$  gelten. Somit ist die kritische Dämpfung  $C_c$  gegeben durch:

$$C_c = 2M\omega \quad (2.21)$$

Der Wert für  $r$  in Gl. (2.20) ergibt sich zu:

$$r = -\frac{C}{2M} = -\omega \quad (2.22)$$

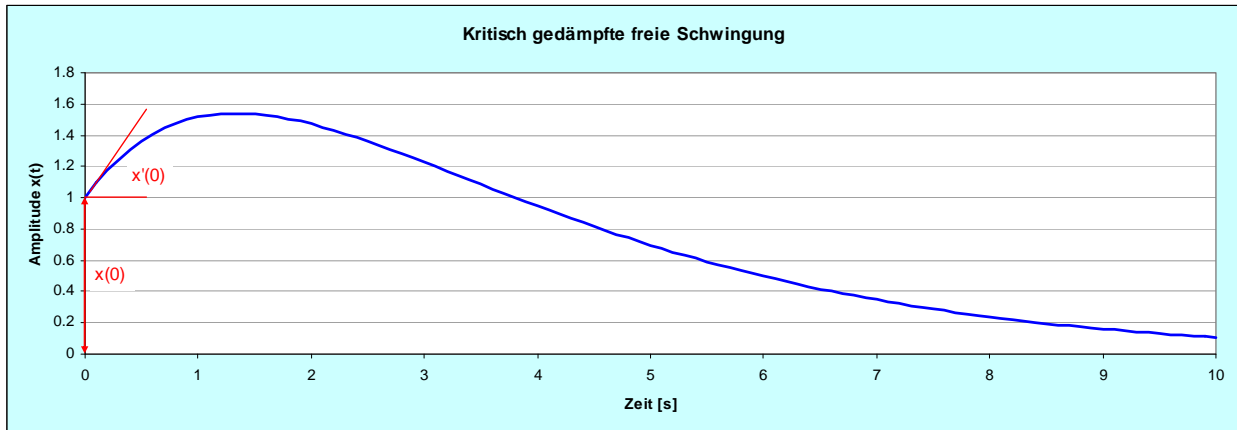
und die Lösung für Gleichung (2.18) lautet:

$$x(t) = (G_1 + G_2 t)e^{-\omega t} \quad (2.23)$$

wobei der zweite Term mit  $t$  multipliziert wird, da nur ein Wert für  $r$  vorhanden ist in der Lösung. Indem wir nun die Anfangsbedingungen in Gl. (2.23) einführen erhalten wir die endgültige Form der Bewegungsgleichung für den kritisch gedämpften Schwinger als:

$$x(t) = [x(0)(1 + \omega t) + \dot{x}(0)t]e^{-\omega t} \quad (2.24)$$

Bild 2.4 zeigt eine solche kritische gedämpfte freie Schwingung mit  $\omega = 2$  rad/s,  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 1$ . Man sieht, dass eine solche Schwingung keine Oszillation um den Nullpunkt aufweist sondern in die Null-Lage zurückkehrt entsprechend dem Exponential-Term in Gl.(2.24).



**Bild 2.4** Kritisch gedämpfte freie Schwingung mit  $\omega = 0.5$  rad/s,  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 1$

### Unterkritisch gedämpftes System

Ist die Dämpfung kleiner als die kritische Dämpfung, so ist  $C < 2M\omega$  und der Wurzelausdruck in Gleichung (2.20) wird negativ. Für die weitere Berechnung ist es praktisch die Dämpfung als Verhältniszahl  $\xi$  zur kritischen Dämpfung  $C_c$  auszudrücken, d.h.:

$$\xi = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2M\omega} \quad (2.25)$$

Dabei wird  $\xi$  als Dämpfungsverhältnis oder kurz als Dämpfung bezeichnet und wird in Prozenten der kritischen Dämpfung angegeben.

Wir führen nun Gl. (2.25) in Gl. (2.20) ein und erhalten so:

$$r = -\xi\omega \pm \sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2} \quad (2.26)$$

Durch Wechsel des Vorzeichens und mit dem neuen Symbol  $\omega_D$  vereinfacht sich Gl. (2.26) zu:

$$r = -\xi\omega \pm i\omega_D \quad (2.27)$$

mit

$$\omega_D = \omega\sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.28)$$

Die Grösse  $\omega_D$  ist die gedämpfte Winkelgeschwindigkeit. Bei für Bauwerke üblichen Dämpfungswerten (d.h.  $\xi < 20\%$ ) weicht sie nur wenig von der ungedämpften Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ab.

Die freie Schwingung eines unterkritisch gedämpften Systems erhalten wir nun, indem wir Gl. (2.27) in Gl. (2.4) einsetzen, d.h.:

$$x(t) = G_1 e^{-\xi\omega t + i\omega_D t} + G_2 e^{-\xi\omega t - i\omega_D t} = e^{-\xi\omega t} (G_1 e^{i\omega_D t} + G_2 e^{-i\omega_D t}) \quad (2.29)$$

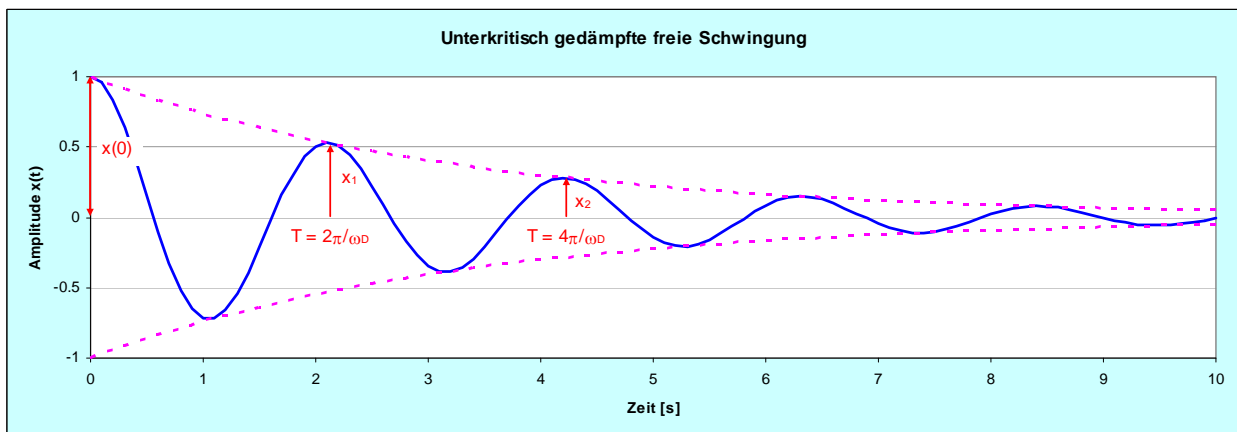
Der Ausdruck in Klammern stellt eine einfache harmonische Schwingung dar [vgl. Gl. (2.12)]. Somit kann dieser Ausdruck auch geschrieben werden als:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2.30)$$

Wenn wir nun noch die Anfangsbedingungen  $x(0)$  und  $\dot{x}(0)$  einführen, erhalten wir schliesslich:

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} \left[ \frac{\dot{x}(0) + x(0)\xi\omega}{\omega_D} \sin \omega_D t + x(0) \cos \omega_D t \right] \quad (2.31)$$

Bild 2.5 zeigt eine solche unterkritische gedämpfte freie Schwingung mit  $\omega = 3$  rad/s,  $\xi = 10\%$ ,  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$ .  $\dot{x}(0) = 0$  bedeutet nichts anderes, als dass die Masse aus einer ausgelenkten Lage ( $x(0) = 1$ ) losgelassen wird und frei ausschwingt. Die Masse schwingt um die Null-Lage mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega_D$ . Die Dämpfung wird durch den Term  $e^{-\xi\omega t}$  ausgedrückt.



**Bild 2.5** Unterkritisch gedämpfte freie Schwingung mit  $\omega = 3$  rad/s,  $\xi = 10\%$ ,  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$

Betrachten wir nun in Bild 2.5 zwei aufeinander folgende Ausschläge, d.h.  $x_n$  und  $x_{n+1}$ . Das Verhältnis dieser beiden Werte ist (gemäss Gl. 2.30) gegeben durch:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D}} \quad (2.32)$$

Nimmt man nun den natürlichen Logarithmus (ln) auf beiden Seiten, erhalten wir das sogenannte logarithmische Dekrement  $\delta$ :

$$\delta \equiv \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi\xi \frac{\omega}{\omega_D} \quad (2.33)$$

oder mit Gleichung (2.28):

$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.34)$$

Für kleine Dämpfungen kann Gl. (2.34) vereinfacht werden zu:

$$\delta \cong 2\pi\xi \quad (2.35)$$

Für die Bestimmung der Dämpfung aus einem Ausschwingversuch (wie in Bild 2.5) nimmt man bei kleinen Dämpfungen mit Vorteil mehrere Schwingungszyklen und erhält:

$$\xi = \frac{\ln(x_n / x_{n+m})}{2m\pi(\omega / \omega_D)} \quad (2.36)$$

Dies lässt sich schliesslich für sehr kleine Dämpfungen vereinfachen zu:

$$\xi = \frac{x_n - x_{n+m}}{2m\pi x_{n+m}} \quad (2.37)$$

## 2.3 Harmonische Anregung

Die harmonische Anregung hat im Zusammenhang mit schwingenden Systemen die grösste Bedeutung. Dies nicht nur weil sie effektiv recht häufig vorkommt, sondern auch weil jede beliebige (zeitlich variable) Belastung als eine Kombination von harmonischen Anregungen dargestellt werden kann.

### 2.3.1 Ungedämpftes System

Wir nehmen nun an, dass das System in Bild 2.1 einer harmonischen Belastung  $P(t)$  mit Amplitude  $P_0$  und Winkelgeschwindigkeit  $\bar{\omega}$  unterworfen sei. Somit sieht die Bewegungsgleichung wie folgt aus:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.38)$$

Bevor wir den allgemeinen Fall *mit Dämpfung* betrachten, wollen wir den einfacheren Fall *ohne Dämpfung* untersuchen, für welchen die Bewegungsgleichung

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.39)$$

gilt. Die komplementäre Lösung für diese Gleichung ist die freie Schwingung von Gl. (2.14), d.h.

$$x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (2.40)$$

Die allgemeine Lösung umfasst auch die partikuläre Lösung, d.h. das spezifische Verhalten, das von der dynamischen Belastung hervorgerufen wird. Wir nehmen an, dass die von der harmonischen Belastung hervorgerufene Schwingung ebenfalls harmonisch und mit der Belastung in Phase sei, d.h.:

$$x_p(t) = G \sin \bar{\omega}t \quad (2.41)$$

wobei die Konstante  $G$  noch offen ist. Indem wir nun Gl. (2.41) in Gl. (2.39) einsetzen, erhalten wir:

$$-M\bar{\omega}^2 G \sin \bar{\omega}t + KG \sin \bar{\omega}t = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.42)$$



Wir teilen durch  $\sin \bar{\omega}t$  und  $K$  und erhalten mit  $K/M = \omega^2$  und einigen Umformungen:

$$G \left( 1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2} \right) = \frac{P_0}{K} \quad (2.43)$$

Die Amplitude der durch  $P_0 \sin \bar{\omega}t$  erzeugten Schwingung ist somit gegeben durch:

$$G = \frac{P_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (2.44)$$

wobei das Verhältnis zwischen der Anregungsfrequenz und der Eigenfrequenz ausgedrückt wird durch:

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad (2.45)$$

Die allgemeine Lösung für ein ungedämpftes System unter harmonischer Anregung ist somit gegeben durch die Kombination der komplementären und der partikulären Lösung, d.h.:

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{P_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \omega t \quad (2.46)$$

Die Werte für  $A$  und  $B$  (in Gl. 2.46) hängen dabei immer noch von den Anfangsbedingungen ab, mit denen die Schwingung gestartet wird. Für ein System, das aus der Ruhelage angeregt wird, d.h. mit  $x(0) = 1$  und  $\dot{x}(0) = 0$  erhalten wir für die Konstanten

$$A = \frac{P_0 \beta}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad B = 0 \quad (2.47)$$

Damit wird Gl. (2.46) zu:

$$x(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t) \quad (2.48)$$

worin die einzelnen Terme folgende Bedeutung haben:

$P_0/K = x_{st}$  = Statische Verschiebung, d.h. die Verschiebung, welche die Last  $P_0$  verursachen würde, wenn sie rein statisch wirken würde.

$1/(1 - \beta^2)$  = Verstärkungsfaktor, der die Verstärkung der harmonisch wirkenden Belastung gegenüber der statisch wirkenden darstellt

$\sin \bar{\omega}t$  = Schwingungsanteil, der die gleiche Frequenz hat, wie die harmonische Anregung

$\beta \sin \omega t$  = Schwingungsanteil, der die Frequenz der Eigenschwingung hat

Als geeignete Grösse zur Darstellung der Wirkung der harmonischen Anregung kann das Verhältnis zwischen der dynamischen Amplitude zur Auslenkung, welche die gleiche Last statisch hervorrufen würde, dienen, d.h.:

$$V(t) = \frac{x(t)}{P_0 / K} \quad (2.49)$$

Mit Gl. (2.48) ergibt sich dieser Verstärkungsfaktor  $V(t)$  zu:

$$V(t) = \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \bar{\omega}t - \beta \sin \omega t) \quad (2.50)$$

### 2.3.2 Gedämpftes System

Wir kehren nun zurück zur Bewegungsgleichung mit Dämpfung, d.h.:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = P_0 \sin \bar{\omega}t \quad (2.51)$$

Wir dividieren durch  $M$  und verwenden  $C/M = 2\xi\omega$  und erhalten somit:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{P_0}{M} \sin \bar{\omega}t \quad (2.52)$$

Die komplementäre Lösung dieser Gleichung ist die gedämpfte freie Schwingung von Gl. (2.30), d.h.:

$$x_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) \quad (2.53)$$

Die partikuläre Lösung für diese harmonische Belastung hat die Form:

$$x_p(t) = G_1 \sin \bar{\omega}t + G_2 \cos \bar{\omega}t \quad (2.54)$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (2.54) erforderlich ist, weil die Schwingung des gedämpften Systems im Allgemeinen nicht in Phase mit der Anregung ist.

Indem wir nun Gl. (2.54) in G. (2.52) einsetzen und aufteilen in Produkte von  $\sin \bar{\omega}t$  und  $\cos \bar{\omega}t$  erhalten wir:

$$(-G_1 \bar{\omega}^2 - G_2 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_1 \omega^2) \sin \bar{\omega}t = \frac{P_0}{M} \sin \bar{\omega}t \quad (2.55a)$$

$$(-G_2 \bar{\omega}^2 + G_1 \bar{\omega} (2\xi\omega) + G_2 \omega^2) \cos \bar{\omega}t = 0 \quad (2.55a)$$

Diese beiden Beziehungen müssen einzeln erfüllt sein, da der Sinus-Term und der Cosinus-Term zu unterschiedlichen Zeiten zu Null werden. Indem wir nun beide mit  $\omega^2$  dividieren und gruppieren, erhalten wir schliesslich:

$$G_1 = \frac{P_0}{K} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \quad (2.56a)$$

$$G_2 = \frac{P_0}{K} \frac{-2\xi\beta}{(1 - \beta^2) + (2\xi\beta)^2} \quad (2.56a)$$

Wir setzen nun diese Ausdrücke in die partikuläre Lösung [Gl. (2.54)] ein und fügen die komplementäre Lösung hinzu, um die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung des gedämpften Ein-Massen-Schwingers zu erhalten:

$$x_c(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t) + \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t] \quad (2.57)$$

Der erste Term in Gl. (2.57) stellt den transienten Anteil der Reaktion auf eine harmonische Belastung dar. Die Konstanten A und B könnten für jede beliebige Anfangsbedingung berechnet werden, doch wird dieser Teil relativ schnell gedämpft und verschwindet. Er ist im Allgemeinen nicht von Bedeutung und soll hier nicht weiter untersucht werden. Der zweite Term in Gl. (2.57) stellt den Teil der Schwingung dar, der andauert. Er hat die Frequenz der Anregung ist aber nicht in Phase mit der Anregung. Der uns interessierende Teil der Schwingung hat somit die Form:

$$x_c(t) = \frac{P_0}{K} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega}t - 2\xi\beta \cos \bar{\omega}t] \quad (2.58)$$

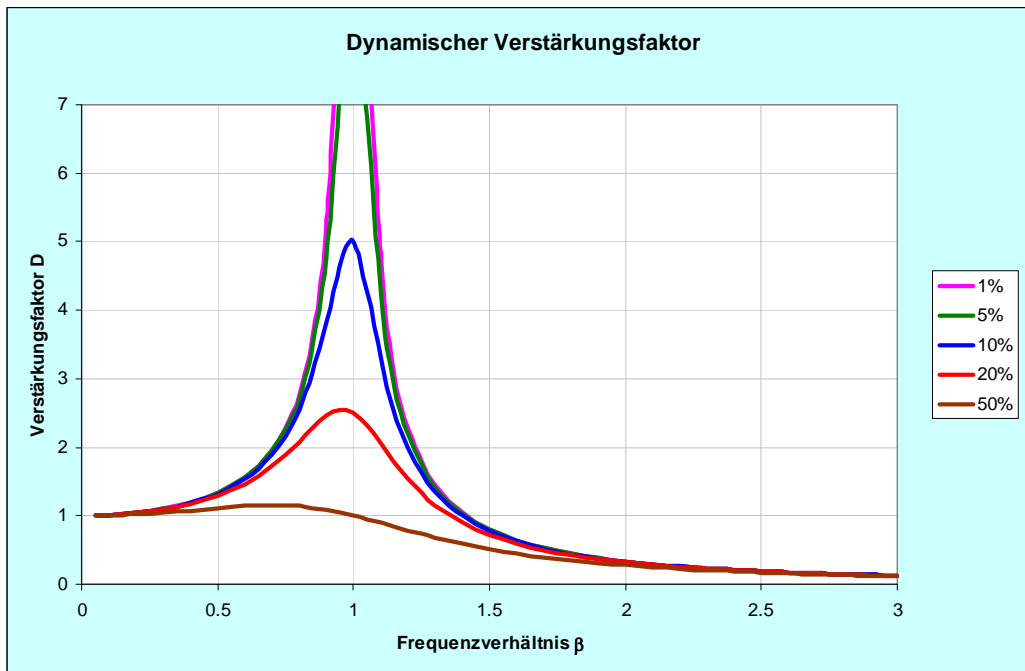
Die Amplitude  $\rho$  dieser Schwingung kann man sich am einfachsten herleiten, indem man den Sinus-Term und den Cosinus-Term als Vektoren graphisch darstellt. Die Vektorsumme der beiden um  $90^\circ$  gegeneinander verdrehten Vektoren erhält man als Wurzel aus der Summe der Quadrate der beiden Vektoren, d.h.:

$$\rho = \frac{P_0}{K} \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.59)$$

Das Verhältnis zwischen dieser Amplitude  $\rho$  und der statischen Auslenkung ( $P_0/K$ ) bezeichnen wir als dynamischen Verstärkungsfaktor. D berechnet sich somit wie folgt:

$$D \equiv \frac{\rho}{P_0 / K} = \sqrt{\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.60)$$

In Bild 2.6 ist der dynamische Verstärkungsfaktor D für verschiedene Dämpfungsverhältnisse  $\xi$  in Funktion des Frequenzverhältnisses  $\beta$  dargestellt. Bei sehr langsamer Anregung ( $\beta \ll 1$ ) liegt der dynamische Verstärkungsfaktor bei 1, d.h. die dynamische Auslenkung entspricht der statischen Auslenkung; bei sehr schneller Anregung ( $\beta \gg 1$ ) hingegen nähert sich der Verstärkungsfaktor 0, da nun die Masse soviel Widerstand leistet, dass sich praktisch keine Bewegung mehr einstellt. Liegt die Anregungsfrequenz jedoch im Bereich der Eigenfrequenz ( $\beta \sim 1$ ), so ergibt sich – je nach Dämpfung ( $\xi$ ) – eine mehr oder weniger grosse Verstärkung, d.h. es tritt Resonanz ein.



**Bild 2.6** Dynamischer Verstärkungsfaktor D für verschiedene  $\xi$  und  $\beta$

### 2.3.3 Resonanzschwingung

Bei Anregungen im Bereich der Eigenfrequenz ( $\beta \sim 1$ ) und bei kleiner Dämpfung lässt sich Gl. (2.60) vereinfachen zu:

$$D_{\beta=1} = \frac{1}{2\xi} \quad (2.61)$$

d.h. die Verstärkung ist dann umgekehrt proportional zur Dämpfung. Bei stärkeren Dämpfungswerten tritt das Maximum allerdings nicht bei  $\beta = 1$  auf sondern – wie man mittels Ableitung von Gl. (2.60) herleiten kann – bei:

$$\beta_{\max} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (2.62)$$

und der entsprechende Verstärkungsfaktor beträgt:

$$D_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (2.63)$$

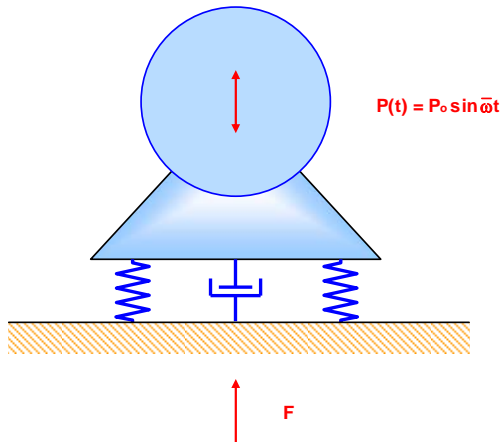
Bei üblichen Dämpfungswerten ist der Unterschied zwischen Gl. (2.61) und Gl. (2.63) allerdings vernachlässigbar.

### 2.3.4 Erschütterungsisolation

Eine der wichtigsten Anwendungen der Ein-Massen-Schwinger-Theorie ist die Erschütterungsisolation. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle: Der *Schutz der Umgebung einer Maschine vor den störenden Schwingungen dieser Maschine* und der *Schutz einer Maschine oder Anlage vor den störenden Schwingungen der Umgebung*.

## Isolation des Bodens gegenüber einer vibrierenden Maschine

Diese Situation ist in Bild 2.7 dargestellt. Eine Maschine erzeugt – z.B. durch die Rotation von nicht ausgewuchteten Komponenten – eine vertikale oszillierende Kraft  $P(t) = P_0 \sin \omega t$ .



**Bild 2.7** Elastisch gelagerte Maschine

Ist die Maschine, wie in Bild 2.7 dargestellt, auf einem Feder-Dämpfungssystem montiert, so ist ihre Bewegung durch Gleichung (2.64) gegeben:

$$x(t) = \frac{P_0}{K} D \sin(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (2.64)$$

worin  $D$  in Gl. (2.60) definiert ist. Somit berechnet sich die Kraft, die von den Federn auf die Unterlage ausgeübt wird, zu:

$$F_s = Kx(t) = P_0 D \sin(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (2.65)$$

Die Geschwindigkeit der Bewegung der elastisch gelagerten Maschine erhalten wir durch Ableitung von Gl. (2.64):

$$\dot{x}(t) = \frac{P_0}{K} D \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (2.66)$$

Dies ergibt die Kraft, die von den Dämpfungselementen auf die Unterlage ausgeübt wird:

$$F_d = C\dot{x}(t) = \frac{CP_0 D \bar{\omega}}{K} \cos(\bar{\omega}t - \vartheta) = 2\xi\beta P_0 D \cos(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (2.67)$$

Da diese Dämpfungskraft gegenüber der Federkraft um  $90^\circ$  phasenverschoben ist, ergibt sich die gesamte auf die Unterlage abgegebene Kraft zu:

$$F_{\max} = (F_{s,\max}^2 + F_{d,\max}^2)^{1/2} = P_0 D [1 + (2\xi\beta)^2]^{1/2} \quad (2.68)$$

Das Verhältnis zwischen der maximalen Kraft auf die Unterlage zur maximalen von der Maschine erzeugten Kraft berechnet sich somit zu:

$$TR \equiv \frac{F_{\max}}{P_0} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (2.69)$$

und lässt sich in Form des Diagramms von Bild 2.8 darstellen. Die Kurven sind ähnlich wie in Bild 2.6, doch gehen hier alle Kurven bei  $\beta = \sqrt{2}$  durch denselben Punkt. Dies ist bedingt durch den Einfluss der Dämpfungskraft. Die Dämpfungskraft reduziert die Wirkung der Isolation im Frequenzbereich über  $\beta = \sqrt{2}$ .

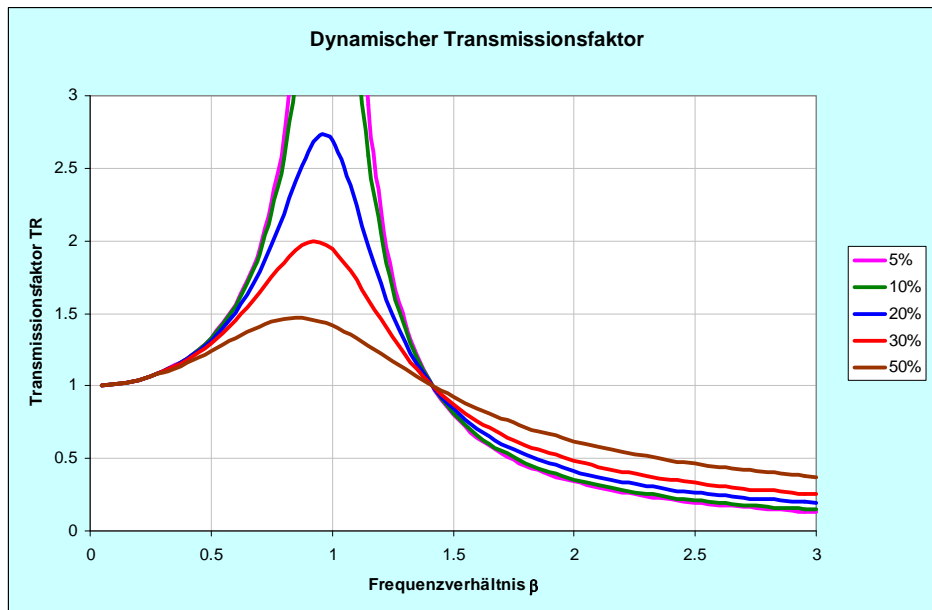


Bild 2.8 Transmissionsfaktor für verschiedene  $\xi$  und  $\beta$

### Isolation der Maschine gegenüber einem vibrierenden Boden

Die Situation, bei der eine Maschine oder eine Anlage gegenüber den Erschütterungen des Bodens isoliert werden soll, ist in Bild 2.9 dargestellt. Die zu isolierende Masse M ruht auf einem Feder-Dämpfungssystem. Der Boden, auf dem das Feder-Dämpfungssystem befestigt ist, führt eine vertikale harmonische Bewegung  $x_g(t)$  aus.

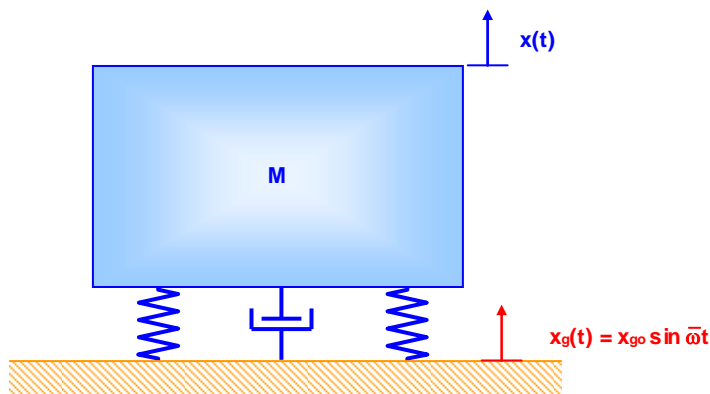


Bild 2.9 Elastisch gelagerte Maschine

Die Gleichgewichtsbedingung lautet hier:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = -M\ddot{x}_g(t) \quad (2.70)$$

d.h. die äussere Kraft wird durch die Trägheitskraft der Masse M gegeben, d.h.

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = -M\ddot{x}_{g0} \sin \bar{\omega} t \quad (2.71)$$

Die maximale Amplitude ergibt sich wiederum nach Gl. (2.59) zu:

$$\rho = \frac{M\ddot{x}_{g0}}{K} D \quad (2.72)$$

Anstelle der Bodenbeschleunigung führen wir die Bewegung des Bodens ( $x_{g0}$ ) ein und erhalten:

$$\rho = \frac{M\bar{\omega}^2 x_{g0}}{K} D = x_{g0} \beta^2 D \quad (2.73)$$

Die Bewegung der Masse relativ zum Boden beträgt somit:

$$x(t) = x_{g0} \beta^2 D \sin(\bar{\omega}t - \vartheta) \quad (2.74)$$

Durch vektorielle Addition der Bewegung des Bodens zur Bewegung der Masse erhalten wir schliesslich:

$$x^t(t) = x_{g0} \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} D \sin(\bar{\omega}t - \bar{\vartheta}) \quad (2.75)$$

Woraus sich die Formel für den Transmissionsfaktor ergibt:

$$TR \equiv \frac{x_{\max}^t}{x_{g0}} = D \sqrt{1 + (2\xi\beta)^2} \quad (2.76)$$

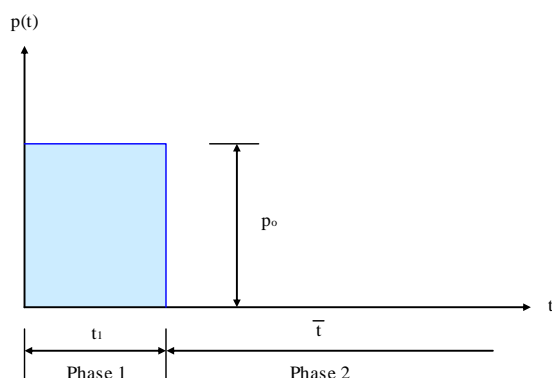
Diese Gleichung ist identisch mit Gl. (2.69), sodass wir die Kurven in Bild 2.8 für beide Fälle, d.h. für die Isolation einer Umgebung vor den störenden Schwingungen einer Maschine und für die Isolation einer Anlage vor den störenden Schwingungen einer Umgebung verwenden können.

## 2.4 Impulsartige Anregung

Nach der *harmonischen Anregung* des Ein-Massen-Schwingers wollen wir nun die *impulsartige* Anregung näher betrachten. Dabei beschränken wir uns auf den Spezialfall „Rechteck-Impuls“.

### 2.4.1 Rechteckförmiger Impuls

Ein Rechteck-Impuls besteht, wie in Bild 2.10 dargestellt, aus einer kurzen Zeit, während der die volle Last wirkt (Phase 1) und einer Folgezeit (Phase 2), während der keine Last wirkt und das System ausschwingt.



**Bild 2.10** Rechteck-Impuls

In Phase 1 wirkt eine konstante Last. Die partikuläre Lösung für diese Phase ist die statische Auslenkung d.h.:

$$x_p = \frac{P_0}{K} \quad (2.77)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich zu:

$$x_t = \frac{P_0}{K} (1 - \cos \omega t) \quad (2.78)$$

Mit Phase 2 beginnt die freie Schwingung, wie wir sie in Gl. (2.15) beschrieben haben, wobei die Anfangsbedingungen durch die Verhältnisse am Ende der Phase 1 bestimmt werden:

$$x_t = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \sin \omega \bar{t} + x(t_1) \cos \omega \bar{t} \quad (2.78)$$

Die maximale Amplitude unseres Ein-Massen-Schwingers hängt nun primär von der Dauer des Impulses ab. Dauert der Stoss länger als  $T/2$ , d.h. länger als die Hälfte einer Periode, so tritt das Maximum während Phase 1 auf und der dynamische Verstärkungsfaktor beträgt 2. Für kürzere Stossbelastungen tritt das Maximum in Phase 2 auf und das Maximum ist gegeben durch:

$$\rho = x_{\max} = \sqrt{\left[ \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [x(t_1)]^2} \quad (2.79)$$

Mit  $\dot{x} = P_0 \omega / K \sin \omega t$  und  $\omega = 2\pi / T$  erhalten wir:

$$x_{\max} = \frac{P_0}{K} \left[ \left( 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{T} t_1 + \cos^2 \frac{2\pi}{T} t_1 \right) + \sin^2 \frac{2\pi}{T} t_1 \right]^{1/2} \quad (2.80)$$

und damit:

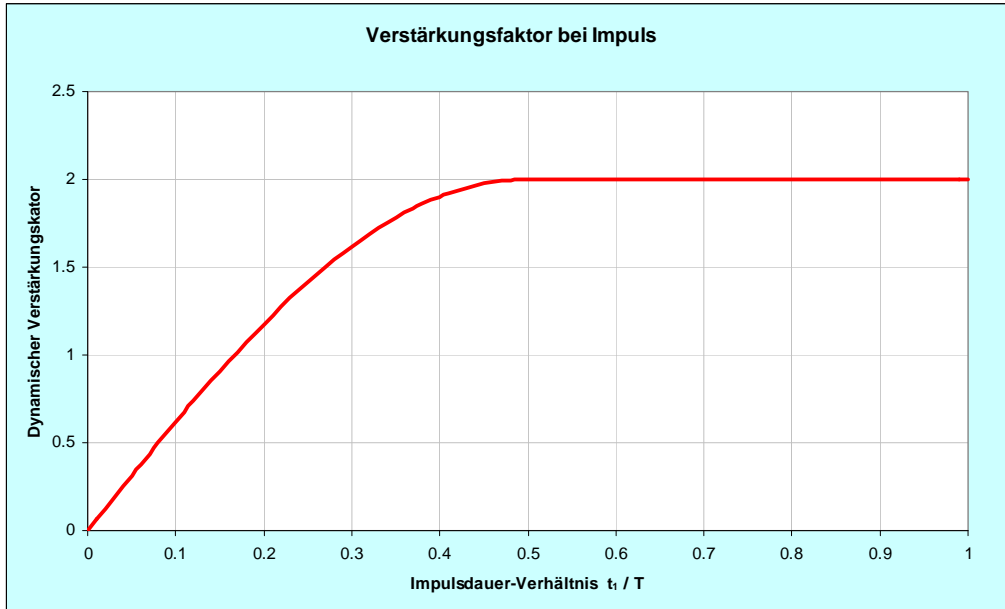
$$x_{\max} = \frac{P_0}{K} \left[ 2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{T} t_1 \right) \right]^{1/2} \quad (2.81)$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$D = \frac{x_{\max}}{P_0/K} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T} \quad \frac{t_1}{T} \leq \frac{1}{2} \quad (2.82)$$



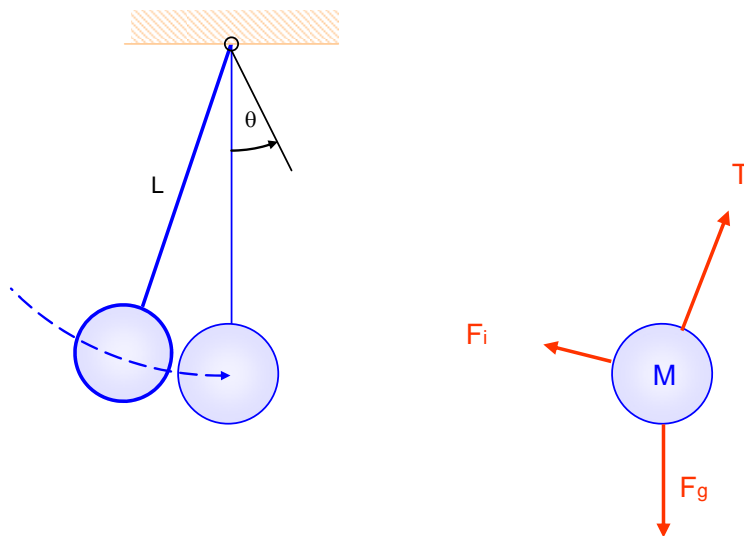
Der Verstärkungsfaktor  $D$  von Gl. 2.82 ist in Bild 2.12 als Funktion des Impuls-Dauer-Verhältnisses dargestellt. Daraus lässt sich rasch ablesen, welche Auslenkung ein Stoß verursachen wird. Es ist zu beachten, dass wir die Herleitung für diesen Verstärkungsfaktor für den ungedämpften Ein-Massen-Schwinger durchgeführt haben. Dies ist allerdings kein wesentlicher Mangel, da die maximale Auslenkung nach sehr kurzer Zeit erreicht wird, bevor durch Dämpfung viel Energie absorbiert werden kann.



**Bild 2.12** Verstärkungsfaktor für Rechteck-Impuls

### 3 Das Pendel

Wie beim Ein-Massen-Schwinger von Bild 2.1 können wir die Bewegungsgleichung für das Pendel mit Hilfe der Gleichgewichtsbetrachtung herleiten.



**Bild 3.1** Pendel

Wir formulieren das Momenten-Gleichgewicht bezüglich des Aufhängepunktes des Pendels und erhalten:

$$F_i L + F_g L \sin \vartheta = 0 \quad (3.1)$$

Einsetzen der Beziehungen für die Trägheitskräfte  $F_i$  und für die Gravitationskräfte  $F_g$  führt zu:

$$ML^2 \ddot{\vartheta}(t) + MgL \sin \vartheta(t) = 0 \quad (3.2)$$

Wir dividieren durch  $ML$  und erhalten:

$$L \ddot{\vartheta}(t) + g \sin \vartheta(t) = 0 \quad (3.3)$$

Für kleine Auslenkungen gilt  $\sin \vartheta \sim \vartheta$  und damit:

$$L \ddot{\vartheta}(t) + g \vartheta(t) = 0 \quad (3.4)$$

Die Bewegungsgleichung für das Pendel ist somit identisch mit der Bewegungsgleichung des Ein-Massen-Schwingers von Bild 2.1.:

$$M\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0 \quad (3.5)$$

Dementsprechend berechnet sich die Winkelgeschwindigkeit des Pendels zu:

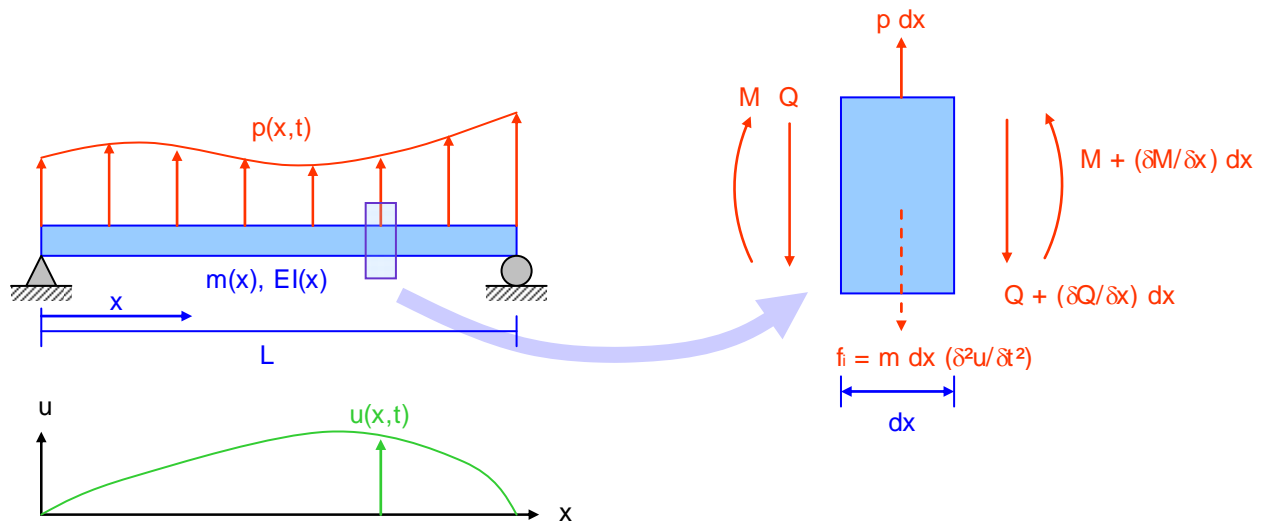
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.6)$$

und die Eigenfrequenz zu:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3.7)$$

## 4 Der einfache Balken

Auch beim Balken führt die Herleitung der Bewegungsgleichung über das Gleichgewicht der Kräfte. Wir formulieren die Gleichgewichtsbedingung an einem herausgeschnittenen Element der Länge  $dx$ , wie in Bild 4.1 dargestellt.



**Bild 4.1** Gleichgewicht am Balkenelement

Die Summe der vertikalen Kräfte ergibt:

$$Q + p dx - \left( Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) - F_i dx = 0 \quad (4.1)$$

wobei  $F_i$  der Trägheitskraft

$$F_i = m dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

entspricht. Damit wird Gl. (4.1) zu:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = p - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Die Summe der Momente ergibt:

$$M + Q dx - \left( M + \frac{\partial M}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (4.4)$$

Da die Ableitung von M der Querkraft entspricht, d.h.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (4.5)$$

ergibt sich aus Gl. (4.3):

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (4.6)$$

Mit der Beziehung:

$$M = EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.7)$$

erhalten wir schliesslich die Bewegungsgleichung des einfachen Balkens zu:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (4.8)$$

Für die freie Schwingung, d.h. ohne äussere Belastung gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (4.9)$$

Wir versuchen eine Lösung zu finden mit dem Ansatz

$$u(x, t) = \varphi(x)q(t) \quad (4.10)$$

d.h. eine Lösung, in der die Schwingung durch ein Produkt von zwei Funktionen dargestellt wird: Die erste Funktion ist eine Funktion von x, d.h. sie stellt die Biegelinie dar. Die zweite Funktion ist eine Funktion der Zeit und stellt somit den Bewegungsablauf dar. Es gilt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi(x)\ddot{q}(t) \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x)q(t) \quad (4.11b)$$

Wir setzen nun Gl. (4.11) in Gl. (4.9) ein und erhalten:

$$m(x)\varphi(x)\ddot{q}(t) + q(t)[EI(x)\varphi''(x)] = 0 \quad (4.12)$$

was, nach Division durch  $m(x)\varphi(x)q(t)$  Gleichung (4.13) ergibt:

$$\frac{-\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{[EI(x)\varphi''(x)]}{m(x)\varphi(x)} \quad (4.13)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ist eine Funktion der Zeit allein, während der Ausdruck auf der rechten Seite eine Funktion von x allein darstellt. Damit die Differentialgleichung (4.13) für alle Werte von x und t gültig ist, müssen die beiden Ausdrücke Konstanten darstellen, die wir mit  $\omega$  bezeichnen wollen. Damit entstehen aus der partiellen Differentialgleichung (4.13) zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, eine als Funktion der Zeit und eine als Funktion des Raumes:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (4.14)$$

$$[EI(x)\varphi''(x)] - \omega^2 m(x)\varphi(x) = 0 \quad (4.15)$$

Gleichung (4.14) hat die gleiche Form wie die Bewegungsdifferentialgleichung des Ein-Massen-Schwingers mit einer Eigenfrequenz  $\omega$  (vgl. Gl. (2.9)).

Wir betrachten im Folgenden den Spezialfall des gleichförmigen einfachen Balkens, bei dem  $EI(x) = EI$  und  $m(x) = m$  gilt. Gleichung (4.15) vereinfacht sich dadurch zu:

$$EI\varphi''''(x) - \omega^2 m\varphi(x) = 0 \quad (4.16)$$

oder

$$\varphi''''(x) - \beta^4\varphi(x) = 0 \quad (4.17)$$

mit

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (4.18)$$

Die allgemeine Lösung für Gl. (4.17) lautet:

$$\varphi(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x \quad (4.19)$$

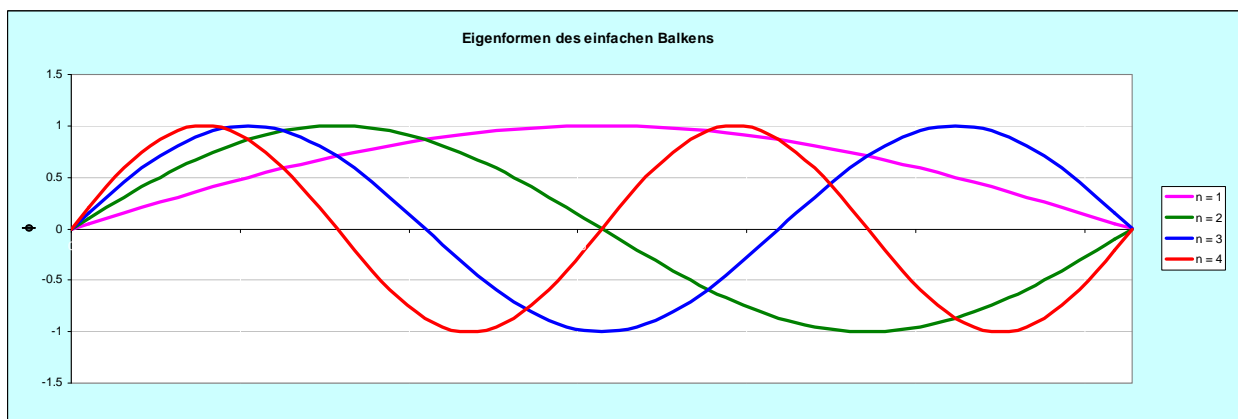
Durch Einführen der Randbedingungen und Anfangsbedingungen lassen sich die noch freien Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  bestimmen. Für den Fall des einfachen, an beiden Enden aufgelegten Balkens müssen die drei Konstanten  $C_2$ ,  $C_3$  und  $C_4 = 0$  sein und  $C_1 \sin \beta L = 0$ . Damit muss  $\sin \beta L = 0$  gelten und damit  $\beta L = n\pi$ . Mit Gl. (4.18) erhalten wir auf diese Weise:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (4.20)$$

und

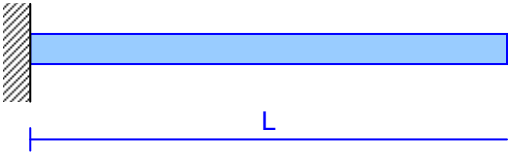
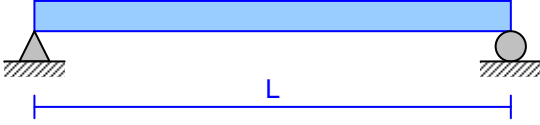
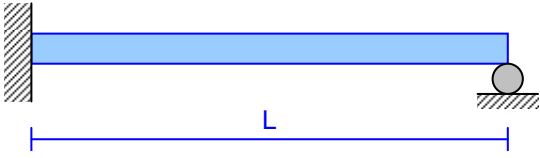
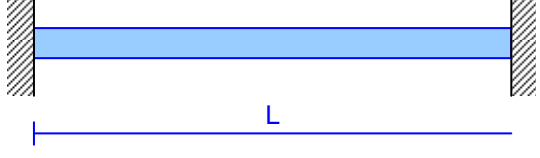
$$\varphi_n(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (4.21)$$

Mit  $\varphi_n$  werden die Biegelinien in den einzelnen Eigenfrequenzen, die so genannten Eigenformen definiert. In Bild 4.2 sind die ersten 4 Eigenformen dargestellt.



**Bild 4.2** Eigenformen des einfachen Balkens

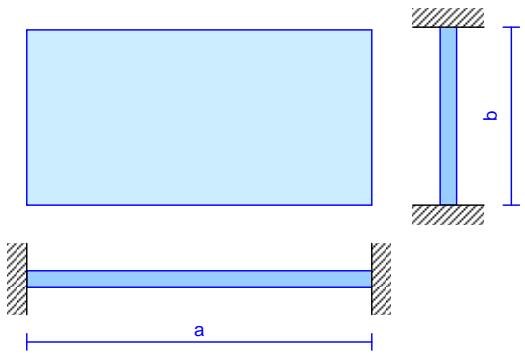
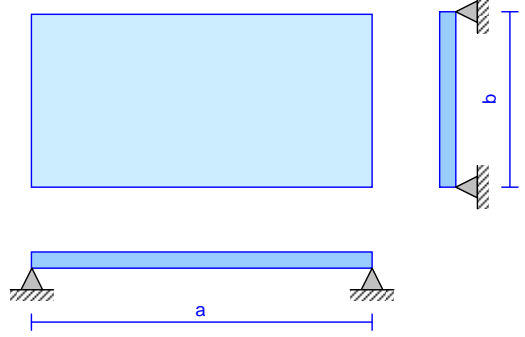
Eigenfrequenzen für einfache Balken mit verschiedenen Auflagerbedingungen finden sich in zahlreichen Nachschlagewerken. In Bild 4.3 sind für einige häufig auftretende Fälle die Eigenfrequenzen zusammengestellt.

|  |  |
|--|--|
| <p>Eigenfrequenz: <math>f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}</math></p> <p> <math>m</math> = Masse pro Einheitslänge des Balkens<br/> <math>L</math> = Spannweite<br/> <math>E</math> = Elastizitätsmodul<br/> <math>I</math> = Trägheitsmoment         </p> |  |
|   | $\lambda_1 = 1.875$<br>$\lambda_2 = 4.694$<br>$\lambda_3 = 7.855$<br>$\lambda_4 = 10.996$<br>$\lambda_5 = 14.137$  |
|   | $\lambda_1 = \pi$<br>$\lambda_2 = 2\pi$<br>$\lambda_3 = 3\pi$<br>...<br>$\lambda_n = n\pi$                         |
|   | $\lambda_1 = 3.926$<br>$\lambda_2 = 7.068$<br>$\lambda_3 = 10.210$<br>$\lambda_4 = 13.352$<br>$\lambda_5 = 16.493$ |
|   | $\lambda_1 = 4.730$<br>$\lambda_2 = 7.853$<br>$\lambda_3 = 10.995$<br>$\lambda_4 = 14.137$<br>$\lambda_5 = 17.279$ |

**Bild 4.3** Eigenfrequenzen des einfachen Balkens

## 5 Rechteck-Platten

Ähnlich wie beim Balken lässt sich auch bei der Platte die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Gleichgewichtsbetrachtung herleiten. Die mathematischen Formulierungen sind einfach etwas komplizierter. Wir wollen deshalb auf die Herleitung verzichten und lediglich die Ergebnisse für zwei häufig vorkommende Fälle präsentieren.

|   |  |  |                           |                |               |                |
|---|--|--|---------------------------|----------------|---------------|----------------|
| <p>Eigenfrequenz: <math>f_{nm} = \frac{\lambda_{nm}^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^3}{12\gamma(1-\nu^2)}}</math></p> |  | <p>a = Länge der Platte<br/> b = Breite der Platte<br/> h = Dicke der Platte<br/> γ = Masse pro Fläche<br/> E = Elastizitätsmodul<br/> ν = Querdehnungszahl<br/> n = Anzahl Halbwellen in Plattenlänge<br/> m = Anzahl Halbwellen in Plattenbreite</p> |                           |                |               |                |
|                                 |  | a/b  | $\lambda_{nm}^2$ und (nm) |                |               |                |
|   |  | 0.4  | 23.65<br>(11)             | 27.82<br>(12)  | 35.45<br>(13) | 46.70<br>(14)  |
|   |  | 2/3  | 27.01<br>(11)             | 41.72<br>(12)  | 66.14<br>(21) | 66.55<br>(13)  |
|   |  | 1.0  | 35.99<br>(11)             | 73.41<br>(21)  | 73.41<br>(12) | 108.3<br>(22)  |
|   |  | 1.5  | 60.77<br>(11)             | 93.86<br>(21)  | 148.8<br>(12) | 149.74<br>(31) |
|   |  | 2.5  | 147.80<br>(11)            | 173.9<br>(21)  | 221.5<br>(31) | 291.9<br>(41)  |
|                                |  | a/b  | $\lambda_{nm}^2$ und (nm) |                |               |                |
|   |  | 0.4  | 11.45<br>(11)             | 16.19<br>(12)  | 24.08<br>(13) | 35.14<br>(14)  |
|   |  | 2/3  | 14.26<br>(11)             | 27.42<br>(12)  | 43.86<br>(21) | 49.35<br>(13)  |
|   |  | 1.0  | 19.74<br>(11)             | 49.35<br>(21)  | 49.35<br>(12) | 78.96<br>(22)  |
|   |  | 1.5  | 32.08<br>(11)             | 61.69<br>(21)  | 98.70<br>(12) | 111.0<br>(31)  |
|   |  | 2.5  | 71.56<br>(11)             | 101.16<br>(21) | 150.5<br>(31) | 219.6<br>(41)  |

**Bild 5.1** Eigenfrequenzen bei Rechteck-Platten

## 6 Dynamik-Probleme in der Praxis

### Die knarrende Decke in der katholischen Kirche von Aarau

In der katholischen Kirche von Aarau wurde zur Verbesserung der Akustik eine abgehängte Decke – aufgehängt an dünnen Stahlstäben – installiert. Die Akustik hat sich dadurch wie erhofft verbessert, doch machte sich auch ein unüberhörbares Knarren bemerkbar. Bei genauem Hinsehen konnte auch festgestellt werden, dass die neue abgehängte Decke sich rhythmisch hin- und her bewegte. Interessanterweise trat dieses Knarren immer zusammen mit dem Läuten der grossen Glocke auf.

Messungen haben gezeigt, dass die Decke mit einer Frequenz von 1.06 Hz ca. 3 mm horizontal hin und her schwingt. Die Betonkonstruktion, an der die Decke aufgehängt ist, schwingt – angeregt durch den Glockenturm - allerdings nur 0.16 mm.

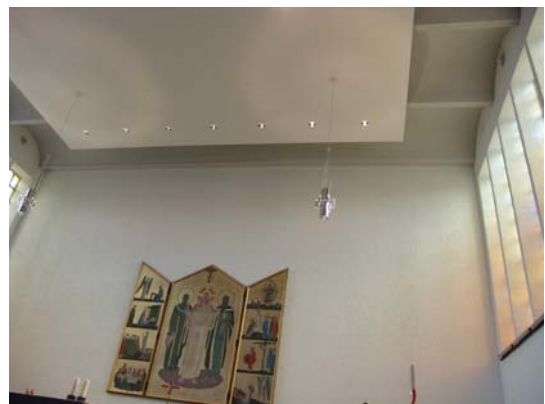


Kirchturm der kath. Kirche von Aarau

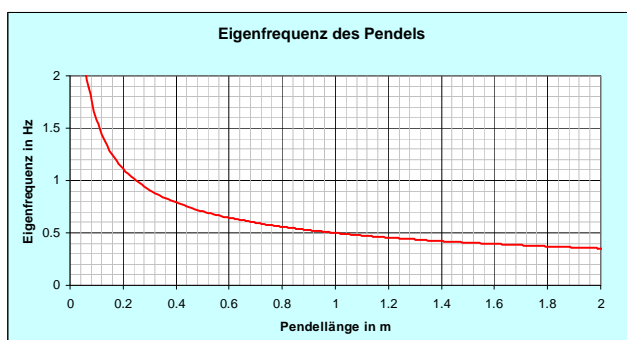
Die abgehängte Decke schwingt wie ein Pendel. Wie in Kapitel 3 hergeleitet beträgt die Eigenfrequenz des Pendels:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

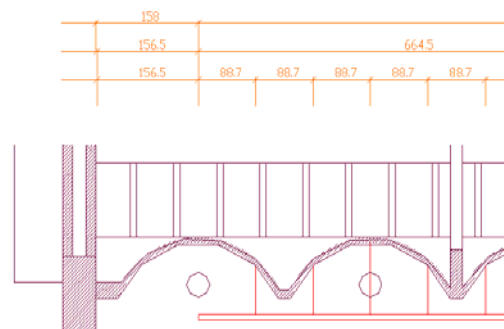
Da die Schwingung des Glockenturms beim Läuten der grossen Glocke genau mit der Eigenfrequenz der abgehängten Decke zusammenfällt, schaukelt sich die abgehängte Decke auf, was zu diesem störenden Knarren führte.



Abgehängte Decke



Eigenfrequenz in Funktion der Pendellänge

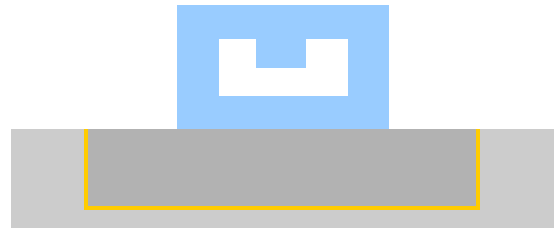


Schnitt durch Decke



## Elastische Lagerung eines Maschinenfundamentes

Für die Herstellung von Modellen und Formen werden hochpräzise Portalfräsen verwendet. Damit keine störenden Erschütterungen die Arbeitsprozesse der Portalfräse stören und damit auch keine Erschütterungen auf die Umgebung übertragen werden, wurde ein elastisch gelagertes Maschinenfundament gebaut.



Elastisch gelagertes Maschinenfundament

Aufgrund von Erfahrungen mit bereits installierten Portalfräsen wurde für die elastische Lagerung eine Eigenfrequenz von 12 Hz vorgeschlagen. Als Isolation wurde eine vollflächige PU-Schaum-Auskleidung gewählt. Der Fundamentblock wurde in zwei Etappen betoniert. Nach dem Einbringen und Aushärten der 1. Hälfte war zu prüfen, ob die anvisierte Eigenfrequenz erreicht wird. Nach dieser Betonieretappe war 25 % der Gesamtmasse (Betonblock und Maschine) vorhanden.

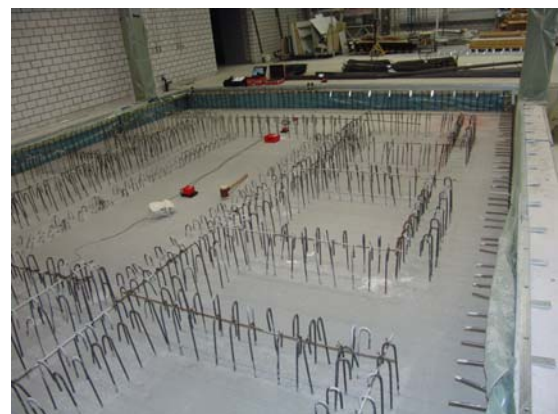


Fundamentwanne mit PU-Schaum-Auskleidung

Die Messungen nach Einbringen der ersten Hälfte ergaben eine vertikale Eigenfrequenz von 24 Hz. Nach Gl. (2.7) und Gl. (2.16) gilt:

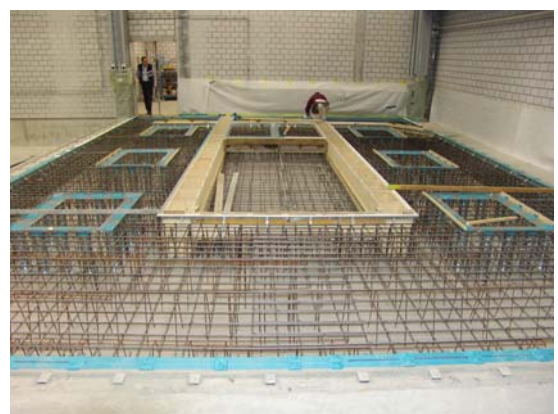
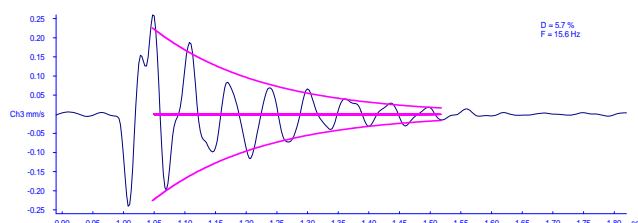
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

Dies bedeutet, dass mit dem Aufbringen der restlichen 75 % sich die Masse noch vervierfacht und die Eigenfrequenz sich um 50 % reduziert. Damit sollte das Ziel von 12 Hz erreicht werden können.



Nach dem Einbringen der ersten Hälfte Beton

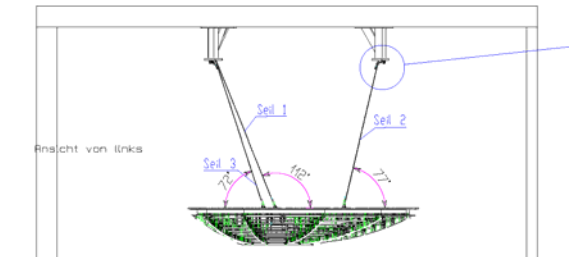
Nach dem Einbringen der 2. Hälfte Beton wurde eine Eigenfrequenz von 15.6 Hz und eine Dämpfung von 5.7 % gemessen. Die Dämpfung wurde nach Gl. (2.37) bestimmt.



Armierung für die zweite Hälfte des Betonblocks

## Schwingende Lampe im Hotel-Eingang

Im Eingangsbereich eines Nobelhotels soll eine wunderschöne Lampe mit den stattlichen Dimensionen von 3 m x 9 m und einem Gesamtgewicht von 18 kN an 3 Seilen von 3 m Länge aufgehängt werden. Neben den künstlerischen Aspekten stellt sich auch die Frage, ob die Lampe durch den Wind nicht etwas stark angeregt wird und bei den Hotelgästen ein ungutes Gefühl auslösen könnte.

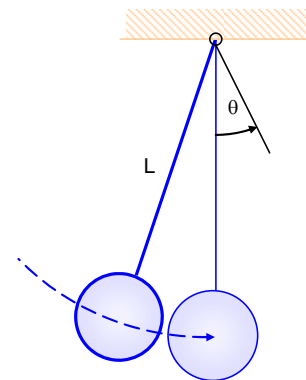


Lampe im Eingangsbereich eines Hotels

Eine auf diese Weise aufgehängte Lampe entspricht ziemlich genau einem Pendel. Die Bewegungsgleichung des Pendels ist in Kapitel 3 hergeleitet und lautet:

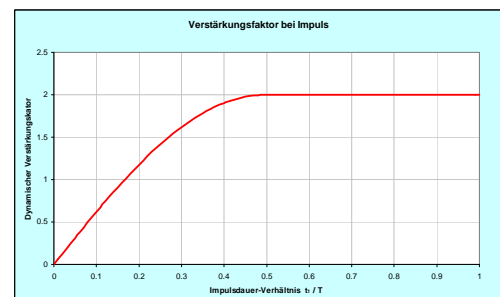
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Mit einer Pendellänge von 3 m ergibt sich somit eine Eigenfrequenz von knapp 0.3 Hz. Die Lampe wird eine sehr langsame Schwingung mit einer Schwingdauer von etwa 3 Sekunden vollführen.

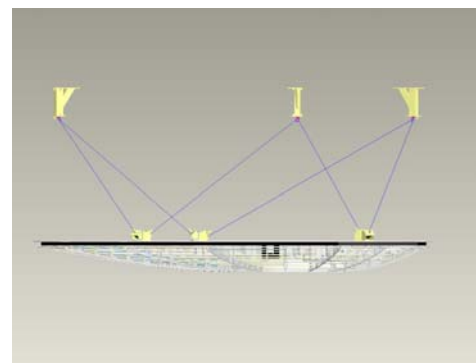


Bei dieser tiefen Eigenfrequenz sind zwar Resonanzerscheinungen ausgeschlossen, doch stellt sich die Frage, ob einzelne Windstöße die Lampe übermäßig stark anregen könnten. Wir können Windstöße als Impulsbelastungen betrachten, wie sie in Kapitel 2.4 beschrieben sind. Solange die Stossdauer kleiner ist als die Halbe Schwingdauer, d.h. in unserem Fall kürzer als 1.5 s, berechnet sich der Verstärkungsfaktor mit:

$$D = \frac{x_{\max}}{P_0/K} = 2 \sin \frac{\pi t_1}{T}$$



Bei längeren Windstößen ist mit einer Verstärkung gegenüber der statischen Auslenkung von 2 zu rechnen. Im vorliegenden Fall bedeutete dies eine Auslenkung von bis zu 30 cm. Dies konnte aus Sicherheitsgründen nicht akzeptiert werden, weshalb eine Aufhängung mit 6 Schrägseilen gewählt wurde. Diese Lösung birgt allerdings die Gefahr von Stossbelastungen der Seile bei Extremwinden. Deshalb wurden die Seile nicht direkt sondern über Gummielemente befestigt.



### Schwingungstilger für die Wylandbrücke in Winterthur?

Die Wylandbrücke in Winterthur wurde als 2-Feld-Träger in Stahlfachwerk-Beton-Verbundkonstruktion mit Spannweiten von 62 m und 45 m projektiert. Bei einer Fussgängerbrücke mit diesen Spannweiten stellt sich sogleich die Frage, ob die durch Personen erzeugten Schwingungen nicht zu stark werden und ob allenfalls Schwingungstilger eingebaut werden sollten. Durch eine einfache Handrechnung wurde abgeklärt, ob die Eigenfrequenzen der Brücke in einem kritischen Bereich liegen.



Die Wylandbrücke ist zwar ein 2-Feld-Träger, doch lässt sich die Eigenfrequenz für die beiden Teile approximativ berechnen, indem man jeden Teil als einfachen Balken betrachtet. Wie in Kap. 4 beschrieben, berechnet sich die Eigenfrequenz des einfachen Balkens nach:

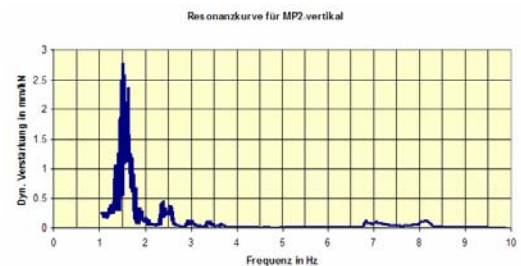
$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

womit für die längere Spannweite von 62 m eine Eigenfrequenz von 1.87 Hz und für die kürzere eine Eigenfrequenz von 3.54 Hz ermittelt wurde.

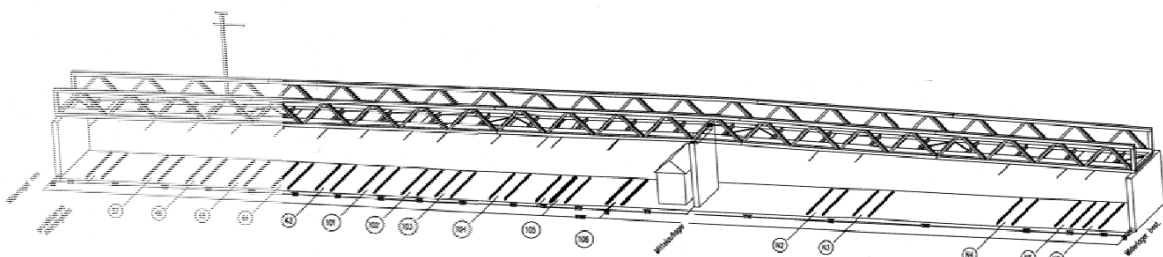


Anregung mit el. Dyn. Erreger

Mit einer Eigenfrequenz von 1.87 Hz liegt die Fussgängerbrücke in einem kritischen Bereich. Deshalb wurden Aussparungen und Befestigungen für Tilger eingeplant. Die Tilger selbst wurden noch nicht eingebaut. Zuerst sollte mit Messungen an der fertig gestellten Brücke abgeklärt werden, ob Tilger tatsächlich nötig sind. Mit einem dynamischen Erreger wurde die Resonanzkurve, die im Falle eines Ein-Massen-Schwingers der Kurve in Bild 2.6 entspricht, ermittelt und so die Eigenfrequenz bestimmt. Für die grössere Spannweite liegt die Eigenfrequenz bei 1.5 Hz und für die kleinere bei 2.8 Hz. Tilger waren nicht erforderlich.



Resonanzkurve mit Spitzenwerten bei 1.5 Hz und 2.8 Hz, gemessen in der Mitte der grossen Spannweite



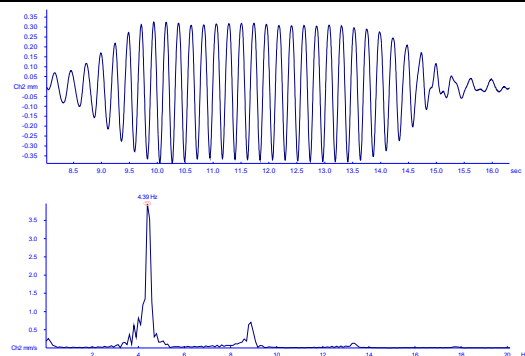


### Kräfte beim Prüfstand für Liftmotoren

Ein Liftmotor ist elastisch gelagert. Die Gesamtmasse beträgt 13 t. Durch Messung der Schwingungen sollen die an den Boden abgegebenen Kräfte bestimmt werden.



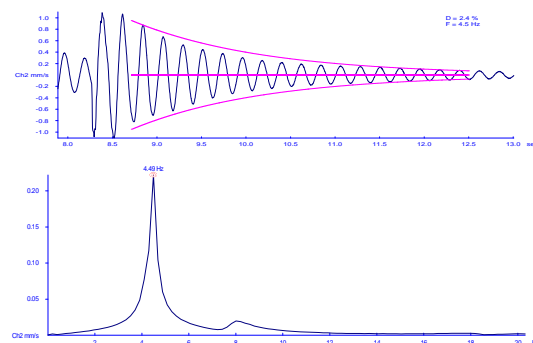
Die Messungen ergeben bei Voll-Last maximale Schwinggeschwindigkeiten von 12.3 mm/s bei 4.4 Hz. Durch Integration des Geschwindigkeitssignals erhalten wir eine maximale Wegamplitude von 0.39 mm.



Mit dem Ausschwingversuch ermitteln wir die Eigenfrequenz und die Dämpfung. Die Eigenfrequenz liegt bei 4.5 Hz und die Dämpfung bei 2.4 %. Mit Gl. (2.7) und einigen Umformungen erhalten wir:

$$K = M\omega^2 = M(2\pi f)^2$$

und damit  $K = 10'393 \text{ kN/m}$



Mit diesen Größen lässt sich – wie in Kapitel 2.3.4 beschrieben – die Krafteinwirkung auf den Boden berechnen. Sie setzt sich zusammen aus der Federkraft und der Dämpfungskraft:

$$F_{\max} = (F_{s,\max}^2 + F_{d,\max}^2)^{1/2} = P_0 D [1 + (2\xi\beta)^2]^{1/2}$$

Die Federkraft errechnet sich leicht aus der Wegamplitude und der Steifigkeit, d.h.:

$$F_{s,\max} = Kx_{\max}$$

Die Dämpfungskraft ist durch den Term  $2\xi\beta$  gegeben und beträgt bei einer Dämpfung von 2.4 % knapp 5 % der Federkraft. Sie kann im vorliegenden Fall vernachlässigt werden.

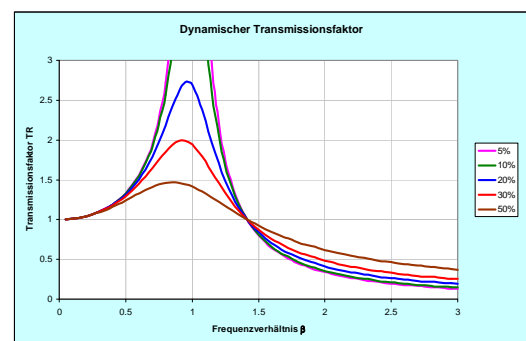
## Elastische Lagerung einer hochempfindlichen Anlage während Bauarbeiten

Bei erschütterungsintensiven Bauarbeiten in der Nähe von Computerzentren oder anderen empfindlichen Anlagen behilft man sich häufig mit einer elastischen Lagerung. Dabei stellt sich natürlich die Frage, ob eine solche elastische Lagerung tatsächlich einen wirksamen Schutz gegen störende Erschütterung bietet. Die theoretischen Grundlagen für die Isolation von Anlagen gegen Erschütterungen von aussen sind im Kapitel 2.3.4 zusammengestellt. Die dynamischen Transferfunktionen im untenstehenden Bild erlauben – zumindest theoretisch – eine einfache Bestimmung der Isolationswirkung.

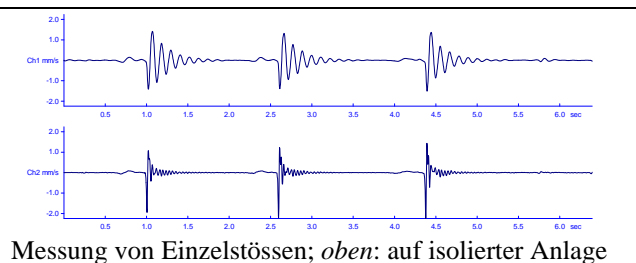


Verkehrsrechner

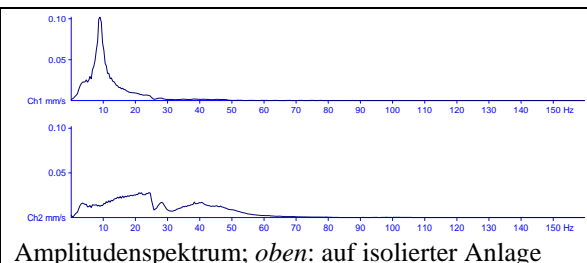
Mit der vereinfachenden Annahme, dass Erschütterungen von Baustellen über 20 Hz liegen, müsste man mit einer elastischen Lagerung von 10 Hz und 10 % Dämpfung eine gute Isolation erreichen. Damit müsste man – nach den Kurven im nebenstehenden Diagramm – eine Reduktion von ca. 80 % bekommen. Allerdings sind diese Kurven für Dauerschwingungen ausgelegt und nicht für Einzelstöße, wie sie auf Baustellen vorkommen.



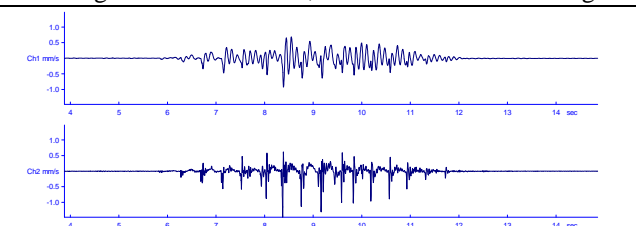
Messungen an einer elastisch gelagerten Anlage geben interessante Hinweise zur erreichbaren Isolationswirkung. Die Anlage war auf 75 mm hohen PU-Schaum-Elementen gelagert und wies eine Eigenfrequenz von 9 Hz und eine Dämpfung von 8 % auf. Bei Einzelstößen wurde eine Reduktion von 33 %, bei einer Serie von Stößen 40 % erreicht. Diese Reduktion bezieht sich auf die Messwerte in Schwinggeschwindigkeit. Berechnen wir die Reduktion für die Beschleunigung, so ergeben sich wesentlich bessere Werte. Für Beschleunigung werden Reduktionen von 75 % erreicht. Stellt sich nun die Frage, was für die Anlage massgebend ist. Der Grund für dieses Verhalten liegt in der Frequenzverteilung: Einzelstöße oder Baustellenerschütterungen generell weisen sehr häufig ein breitbandiges Spektrum auf, weshalb die erreichbare Isolationswirkung nicht einfach aus dem Diagramm abgelesen werden kann.



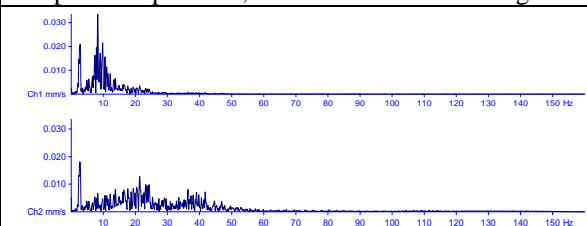
Messung von Einzelstößen; oben: auf isolierter Anlage



Amplitudenspektrum; oben: auf isolierter Anlage



Messung einer Impulsserie; oben: auf isolierter Anlage



Amplitudenspektrum; oben: auf isolierter Anlage

## Harmonische Anregung oder Impuls-Anregung?

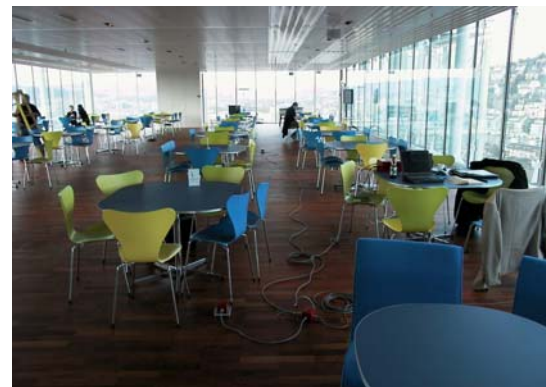
In einem Neubau wurden Decken aus Gasbeton-Fertigelementen eingebaut. Da die Decke primär in einer Richtung trägt, lässt sie sich als einfacher Balken modellieren. Wie in Kap. 4 beschrieben, berechnet sich die Eigenfrequenz des einfachen Balkens nach:

$$f_n = \frac{\lambda_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

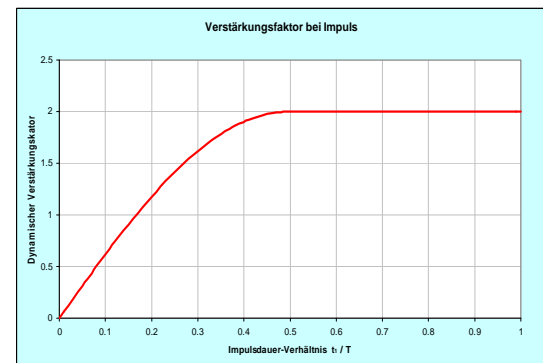
womit sich eine Eigenfrequenz von 6 Hz ergab. Dies liess sich durch Messungen auch verifizieren.



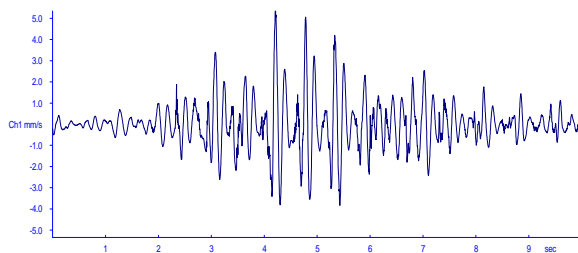
Als dann später das Restaurant seinen Betrieb aufnahm, wunderte man sich doch etwas über die gut spürbaren Schwingungen. Resonanzschwingungen, ausgelöst durch gehende Personen, konnten nicht die Ursache sein, denn die zweite harmonische zur normalen Schrittfrequenz liegt bei 5 Hz und nicht bei 6 Hz. Der Grund für die starken Schwingungen lag in der Impuls-Anregung, die sich bei der extrem leichten Geschossdecke aus Gasbeton bemerkbar machte.



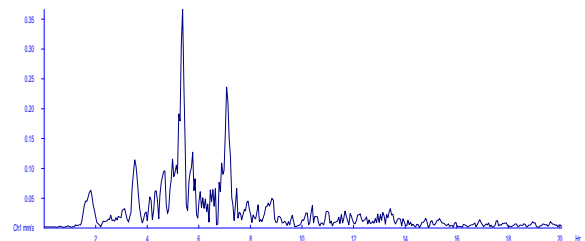
Mit einer Impulsbetrachtung lässt sich zeigen, dass die einzelnen Schritte Schwingungen erzeugen, die sehr gut spürbar sind. Ein Deckenfeld wird als äquivalenter Ein-Massen-Schwinger modelliert, der dann mit einer Impulsbelastung, die einem einzelnen Schritt entspricht, belastet wird. Bei einer Eigenfrequenz der Decke von 6 Hz ( $T = 0.17$  s) und einer Impulsdauer von ca. 0.3 s liegen wir sicher im Bereich mit einem dynamischen Verstärkungsfaktor von 2 (siehe Bild rechts).



Das Bild unten links zeigt die Aufzeichnung der Deckenschwingung während eine Person neben dem Sensor vorbeirent. Wir sehen, dass ein einzelner Schritt eine Schwingung auslöst, die abklingt bevor der nächste Schritt folgt. Die starken Schwingungen sind offensichtlich nicht das Ergebnis einer Resonanzschwingung sondern einer impulsartigen Anregung.



Schwingungsaufzeichnung beim Vorbeigehen einer Person



Amplitudenspektrum für Signal in Bild links