

# Die Modellbrücke in der Bauhalle der EMPA

Masoud Motavalli, Glauco Feltrin, Daniel Gsell, Felix Weber  
Abteilung Ingenieur-Strukturen, EMPA Dübendorf

**Zusammenfassung:** Eine Schrägseilbrücke ist in der Bauhalle der EMPA aufgebaut worden. Das übergeordnete Ziel dieses Projektes ist es, die oftmals stark vereinfachten Laborexperimente näher an das Verhalten der deutlich komplexeren wirklichen Anwendungen zu bringen: eine reale Brückenstruktur wird in gut bekannten Umgebungs- und Randbedingungen erstellt. Die Brücke selbst wird zur eigentlichen Forschungsplattform für Neuentwicklungen in den Gebieten der aktiven, semi-aktiven und passiven Schwingungsdämpfung, der Zustandsüberwachung, der integrierten verteilten Sensorik als auch in der Anwendung von neuartigen Konstruktionsmaterialien. Der Brückenlängsträger ist aus pultrudierten glasfaserverstärkten Kunststoffprofilen aufgebaut und weist eine Länge von zwanzig Metern auf. Der Kunststoffträger wird von drei Paar Schrägseilen unterstützt um dessen Deformationen klein zu halten. Aufgrund der Dimensionen und der Materialwahl wurde das Tragwerk als Fussgängerbrücke ausgelegt. Das mechanische Verhalten der Struktur wird mit der Methode der Finiten Elemente analysiert. Dreidimensionale Balkenelemente basierend auf der Balkentheorie von Timoshenko wurden verwendet. Dadurch können die grossen Schubdeformationen, die durch das schubweiche Verhalten des Materials bedingt sind, berücksichtigt werden.

## 1 Einführung

Im heutigen Brückenbau kann ein Trend zu grösseren freien Spannweiten als auch zu schlankeren Tragwerken und filigraneren einzelnen Tragelementen beobachtet werden. Diese Entwicklung rührt primär daher, dass hochfestere Baustoffe zum Einsatz kommen. Zusätzlich stehen bessere Simulationsmodelle zur Verfügung, die eine höhere Ausnutzung der verwendeten Materialien erlauben. Der Einsatz von glasfaserverstärkten Kunststoffen (GFK) im Brückenbau, hauptsächlich in Brückenplatten unterstreicht die Tendenz zu leichteren Tragwerken zusätzlich.

Die Konsequenz der Entwicklung zu leichten schlanken Bauwerken sind Tragwerke, welche eine stark erhöhte Anfälligkeit auf Vibrationen aufweisen [1]. Die Reduktion der Trägheitsmasse hat zur Folge, dass bei gleich bleibenden dynamischen äusseren Lasten grössere Schwingungsamplituden auftreten. Die verwendeten Materialien sind als Folge davon einer erhöhten Ermüdungsbeanspruchung ausgesetzt. Ein weiterer Grund für die zunehmend auftretenden dynamischen Probleme, bei der Verwendung klassischer Konstruktionsmaterialien, liegt in der Abnahme der Steifigkeit der Tragwerke als auch ihrer einzelnen Elemente. Da die Steifigkeiten meist stärker verkleinert werden als die Massen, resultieren tiefere Eigenfrequenzen der Struktur. Dadurch verlagern sich die Resonanzfrequenzen weiter in Richtung des maximalen Energieinhalts der Frequenzspektren der äusseren dynamischen Anregungen. Das bewirkt wiederum eine erhöhte Schwingungsbeanspruchung des Bauwerks. Der Einsatz von GFK-Brückenplatten führt zu einem leicht differenzierten Verhalten. Aufgrund des kleinen Eigengewichts des Materials liegen die tiefsten Resonanzfrequenzen der unbelasteten Platte relativ hoch. Aufgrund des hohen Verhältnisses Nutzlast zu Eigengewicht können je nach Belastungszustand diese Frequenzen stark nach unten verschoben werden. Somit werden die angesprochenen dynamischen Probleme wieder relevant. Diese vom Belastungszustand abhängigen Resonanzfrequenzen stellen für herkömmliche Schwingungsdämpfungssysteme eine echte Herausforderung dar. So müssen doch Schwingungstilger exakt auf eine Tragwerksfrequenz abgestimmt werden, da sie sonst nicht in der Lage sind Vibrationsenergie effizient zu vernichten.

Von der angesprochenen Tendenz im Hochbau ist nicht nur die Materialermüdung betroffen, sondern auch die Verkehrsteilnehmer werden tangiert. Fühlbare und sichtbare Strukturschwingungen führen zu Unwohlsein als auch zu Unsicherheiten bei den Verkehrsteilnehmern. Dies beeinflusst die Verkehrssicherheit und auch die Akzeptanz des Bauwerks negativ. Um dieser Problematik zu entgegnen ist die Entwicklung entsprechender Vibrationsdämpfungs- und auch Zustandsüberwachungssystemen unerlässlich. Solche Systeme werden in der Regel anhand von einfachen Laborexperimenten entwickelt und getestet. Meist handelt es sich bei solchen Versuchen um einfachste mechanische Systeme mit definierten Rand- und Umgebungsbedingungen [2]. Der Schritt zur realen Anwendung, d.h. komplexeren mechanischen Systemen, teilweise unbekanntem Rand- und veränderlichen Umgebungsbedingungen, ist oftmals sehr gross. Deshalb wurde im Labor der EMPA eine reale Struktur in Form einer Schrägseilbrücke mit definierten Randbedingungen in kontrollierbaren Umwelt-(Labor)-Bedingungen erstellt. Damit soll die grosse Diskrepanz zwischen Labor und Natur überbrückt werden.

Die Brücke dient der EMPA, als auch interessierten externen Partnern, als Experimentierplattform in den folgenden Forschungsgebieten:

- Passive, semi-aktive und aktive Vibrationsdämpfung
- Zustandsüberwachung
- Sensorentwicklung inklusive deren Integration in Netzwerken
- Moderne Materialien in tragenden Elementen

## **2 Konstruktion der Schrägseil GFK-Brücke**

### **2.1 Generelle Überlegungen welche das Design bestimmen**

Die Grösse des Tragwerks ist im Wesentlichen gegeben durch den Platz im Labor, welcher während längerer Zeit zur Verfügung steht. Es handelt sich dabei um ein Volumen von  $20.0 \times 2.5 \times 7.5 \text{ m}^3$ . Das  $1.2 \text{ m} \times 1.2 \text{ m}$  Raster des Aufspannbodens bestimmt die exakte Lage der Auflagerpunkte des Bauwerks. Der Bau eines in den Längen um  $1:x$  skalierten Modells wurde in Betracht gezogen. Um zu erreichen, dass das mechanische Verhalten dem Original entspricht, müssten die Massen des Modells um den Faktor  $x^2$  vergrössert werden. Soll das skalierte Modell mit Aktuatoren bestückt werden, müssten auch diese entsprechend verkleinert werden. Trotz des beschränkten Platzes wurde daher darauf verzichtet ein skaliertes Modell zu realisieren, sondern eine Brücke im Massstab 1:1 gebaut. Aufgrund des zur Verfügung stehenden Raumes, wird eine Fussgängerbrücke gebaut. Um ein möglichst realistisches Tragwerk zu entwerfen, wird die Brücke auf Beanspruchungen infolge der Lasten gemäss Eurocode1 dimensioniert.

Da an dieser Brücke Strategien und Systeme zur Vibrationsdämpfung entwickelt und erforscht werden, muss das Tragwerk so ausgelegt werden, dass es ein Schwingungsproblem aufweist. Eine zuverlässige Voraussage des dynamischen Verhaltens einer solch komplexen Struktur mit Hilfe eines numerischen Modells ist nur bedingt möglich. Die Eigenfrequenzen und die Eigenformen können sehr wohl zuverlässig abgeschätzt werden. Um die Antwort des Systems auf äussere dynamische Einwirkungen genügend genau vorauszusagen, müsste das Dissipationsverhalten der einzelnen Elemente wie auch ihrer Verbindungen hinreichend bekannt sein, was definitiv nicht a priori der Fall ist. Um eine schwingungsanfällige Brücke zu realisieren, werden die oben beschriebenen Trends des Brückenbaus konsequent umgesetzt. Die Brückenplatte wird aus pultrudierten GFK-Profilen aufgebaut, wodurch ein äusserst leichter Längsträger resultiert. Des Weiteren wird als Tragsystem dasjenige einer Schrägseilbrücke gewählt. Durch die Aufhängung der Brückenplatte an steifen Seilen, in kurzen Abständen, kann die Platte trotz des weichen Materials schlank gehalten werden. Ein asymmetrisches, einhüftiges System wird gewählt, so dass eine grosse freie Spannweite resultiert (siehe Abb. 1).

Die Möglichkeit soll bestehen Profile mit integrierten Sensoren, wie optischen Fasern, zu einem späteren Zeitpunkt in das Projekt zu integrieren. Für Untersuchungen im Bereich der Zustandsüberwachung muss die Möglichkeit bestehen Elemente mit künstlichen Defekten einzubauen. Die Struktur muss daher so konstruiert werden, dass die einzelnen Elemente problemlos auswechselbar sind. Somit sind die meisten Verbindungen geschraubt.



Abb. 1 – Schrägseil Fussgängerbrücke in der Bauhalle der EMPA.

## 2.2 Konstruktive Details der Brücke

Der Pylon besteht aus konventionellen H-Profilen aus Stahl, wie auch die Querträger worin die Kabel verankert sind. Der Pylon steht senkrecht und ist am Fusspunkt eingespannt. Bei den Seilen handelt es sich zurzeit um 7-drahtige Stahllitzen mit einer Querschnittsfläche von  $150 \text{ mm}^2$ . Die freie Spannweite wird von insgesamt sechs dieser Stahllitzen getragen. Die Kabel werden auch unter maximaler Nutzlast nur auf ca. 25% ihrer Fließlast beansprucht. Der Grund für die Wahl dieser Kabel liegt in ihrer hohen Steifigkeit, diese bestimmt im Wesentlichen die Durchbiegung der Brückenplatte. Der Pylon wird mit zweimal je drei Litzen in der Platte und dem Widerlager rückverankert.

Die Brückenplatte ist aus fünf Plattenmodulen der Breite 1.6 m zusammengesetzt. Vier dieser Module weisen eine Länge von 3.9 m auf und eines ist 3.6 m lang (siehe Abb. 2). Alle diese Elemente sind aus pultrudierten GFK-Profilen aufgebaut. Da der Werkstoff eine klare Vorzugsrichtung aufweist, werden die Auflasten entsprechend abgetragen. Ein solches Element besteht im Wesentlichen aus vier Längsträgern (siehe Abb. 3). Auf den Seiten ist je ein 200 mm starkes U-Profil angeordnet, während in der Mitte zwei 200 mm hohe I-Profile die Lasten in Längsrichtung abtragen. An den Enden sind diese Längsträger mit Hilfe von Winkeln mit einem Querträger, auch ein 200 mm hohes I-Profil, verbunden. Das Deck besteht aus einem 40 mm hohen Plankenprofil. Es ist in Querrichtung angeordnet und gibt somit die Auflasten an die Längsträger ab. Die Windverbände zwischen den U- und I-Profilen sind nötig um die Kipplänge dieser schlanken Träger zu verkleinern. Das Problem des Kippens beziehungsweise Ausknickens des unteren Flansches, ist auf die hohen Normalkräfte in Folge der schrägen Kabel als auch auf die kleine Schubsteifigkeit der Profile zurückzuführen.

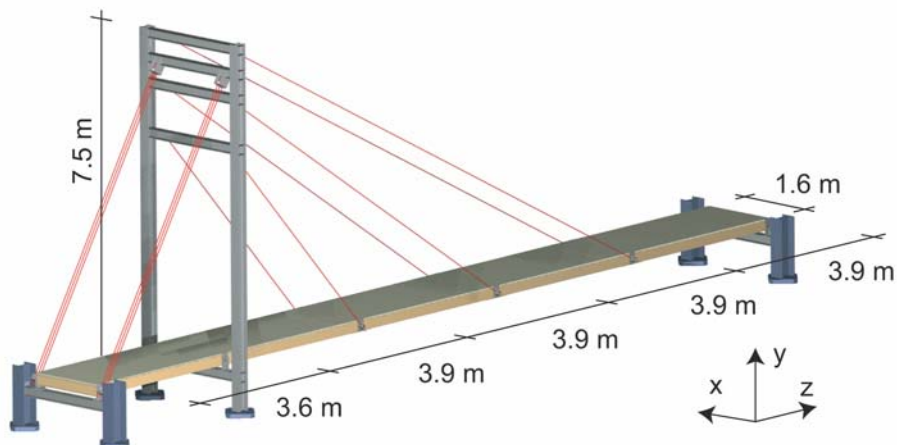


Abb. 2 – Modellskizze der Fussgängerbrücke.

Die Einleitung der konzentrierten Kabelkräfte und der Lagerkräfte erfolgt über ein Stahlhohlprofil. Die Querschnittsgeometrie wurde so gewählt, dass die GFK-I-Profile, welche den Abschluss der einzelnen Elemente bilden, passgenau eingeführt werden. Bei einem solchen Knotenpunkt werden die beiden zu verbindenden Elemente mit acht GFK-Laschen verbunden (siehe Abb. 3b und 3c). Dadurch wird gewährleistet, dass neben den Querkräften auch Biegemomente übertragen werden können. Diese biegesteifen Anschlüsse sind aus Gründen der globalen Stabilität erforderlich.

Die Seile werden derart vorgespannt, dass unter Eigengewicht die Brückenplatte einer Linie vorgegebener Überhöhungen folgt. Die Kabelkräfte sind alle sehr klein, sie liegen im Bereich 2 - 3 kN. Dies ist auf das geringe Eigengewicht zurückzuführen. Die Platte ist, neben den Aufhängungen durch die Schrägseile, an sechs weiteren Punkten gelagert. Beim Auflager der linken Seite sind alle Freiheitsgrade gesperrt, ausser die Rotation um die x-Achse. Beim Pylon als auch beim rechten Auflager, ist zusätzlich zur Rotation auch die Translation in Längsrichtung zugelassen. Eines dieser Gleitlager ist in Abbildung 3c dargestellt.

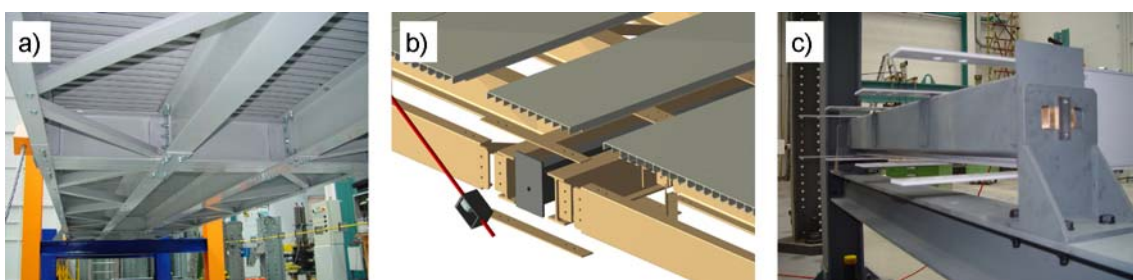


Abb. 3 – Einige Details der Brückenkonstruktion. a) Ansicht von unten. b) Einleitung der Kabelkräfte in die GFRP-Elemente über ein Stahlprofil. c) Verbindung zweier Elemente im Bereich des Gleitlagers beim Pylon.

### 2.3 Einige Unterprojekte die ins Brückenprojekt integriert werden

*Cable vibration mitigation using controlled magnetorheological fluid dampers [2].*

Kabelschwingungen werden mit Hilfe eines magnetorheologischen Fluiddämpfers, der in der Nähe des Fusspunktes des Kabels senkrecht zum Seil angebracht ist, gedämpft. Die Eigenschaften des Dämpfers werden mit einem Magnetfeld so geregelt, dass für den momentanen Schwingungszustand, eine Überlagerung von mehreren Moden, die optimale Dämpfungskraft realisiert wird.

*Fault detection by curvature estimation with fiber optic sensors.* Zur strukturellen Beurteilung von Tragwerken wird derzeit oft die Modalanalyse basierend auf gemessenen Translationsfreiheitsgraden herangezogen [3,4]. Das Ganze wird mit eher moderatem Erfolg betrieben. In diesem Projekt wird die Beurteilung auf Grund von gemessenen Krümmungen vorgenommen. Krümmungen stehen in einem viel direkteren Zusammenhang zu strukturellen Schädigungen, in der Regel Steifigkeitsreduktionen des Querschnittes, als die Verschiebungen. Die Krümmungsmessung erfolgt mit in die Profile integrierten faseroptischen Sensoren.

*Adaptive Tuned Mass Damper.* Ein Problem sehr leichter Strukturen stellt die Abhängigkeit der Resonanzfrequenzen vom momentanen Belastungszustand dar. Um die Struktur permanent mit einem Schwingungstilger optimal zu dämpfen, muss die Frequenz des Tilgers laufend der Belastung und somit der Resonanzfrequenz der Struktur angepasst werden.

*Smart wireless sensing.* Dynamische Untersuchungen grosser Bauwerke erfordern viele Messpunkte. Da jeder Sensor einzeln verkabelt werden muss und enorme Datenmengen anfallen, ist dies mit grossem Messaufwand und somit auch mit hohen Kosten verbunden. Deshalb wird in diesem Projekt ein drahtloses Kommunikationssystem entwickelt, das aus einer Basisstation und vielen einzelnen Satelliten besteht. Ein solcher Satellit besteht aus einem Sensor, dessen Speisung, einem digitalen Datenverarbeitungsmodul, das die Datenflut intelligent vorverarbeitet, sowie einem Sender. Die Basisstation regelt innerhalb des Netzwerkes die Kommunikation, speichert die Daten und ist in der Lage, Sicherheitsprobleme zu erkennen und adäquat zu reagieren.

### **3 Simulationsmodell**

Da das gesamte Tragwerk im Wesentlichen aus Stäben aufgebaut ist, wird das Finite Element Modell aus Balkenelementen zusammengesetzt. Das Brückendeckprofil ist nicht voll schubsteif mit den Längsträgern verbunden. Deshalb wird angenommen, dass es keinen Beitrag zur Biegesteifigkeit in Längsrichtung leistet, sondern nur die Auflasten in Querrichtung auf die Längsträger abträgt sowie als Aussteifung in horizontaler Richtung wirkt. Die Seile werden als Balken mit sehr kleiner Biegesteifigkeit modelliert, wobei jedoch die geometrische Steifigkeit infolge Normalkraft berücksichtigt wird. Die verwendeten pultrudierten GFK-Profile haben einen E-Modul in Faserrichtung von 28 GPa, während der Schubmodul senkrecht dazu lediglich 3 GPa beträgt. Grösse Schubdeformationen treten auf, das heisst sie müssen auch entsprechend berücksichtigt werden.

#### **3.1 Timoshenko Balkenelemente**

Timoshenko [5] hat eine Balkentheorie entwickelt, welche die Schubdeformationen im Falle von gedrungenen und schubweichen Trägern besser berücksichtigt als dies nach Euler-Bernoulli geschieht. Im dynamischen Fall wird mit dieser Theorie die Rotationsträgheit der Querschnitte mitmodelliert, was nur im Falle hoher Frequenzen von Bedeutung ist und hier somit eine untergeordnete Rolle spielt. Die Timoshenko-Theorie geht wie Euler-Bernoulli von der Annahme aus, dass die Querschnitte nach der Deformation eben bleiben und somit die Schubspannungen konstant über den Querschnitt verteilt sind. Während die Theorie von Euler-Bernoulli voraussetzt, dass in der deformierten Konfiguration die Querschnitte immer senkrecht zur Biegelinie stehen, führt Timoshenko hier einen weiteren Freiheitsgrad ein: eine von der Auslenkung unabhängige Rotation des Querschnittes.

Im statischen Fall, mit Lasten die nur an den Knoten angreifen, können exakte Ansatzfunktionen für die Deformationen gefunden werden [6]. Die Verschiebungen quer zur Balkenachse werden mit kubischen Funktionen und die Verdrehungen mit quadratischen Ansätzen beschrieben, deren Koeffizienten jedoch nicht vollständig unabhängig voneinander sind. Werden die Elemente basierend auf dieser Theorie entwickelt, resultieren Elemente mit sechs Freiheitsgraden an jedem Knoten, je drei Rotationen und Verschiebungen.

Für die numerische Abbildung einer Schrägseilbrücke, wo hohe Normalkräfte in den einzelnen Strukturelementen auftreten, müssen Effekte zweiter Ordnung berücksichtigt

werden. Dies geschieht im Falle der Finiten Element Methode über die geometrische Steifigkeitsmatrix.

Um maximale Freiheit und Flexibilität zu gewährleisten wurde das Modell mit Hilfe der Software Matlab™ programmiert. Obwohl die Biegelinien im statischen Fall exakt abgebildet werden, sind die einzelnen Träger durch mehrere Elemente aufgebaut. Der Grund liegt darin, dass das dynamische Verhalten akkurater beschrieben wird. Zur Modellierung der Brücke werden 168 lineare Timoshenko Balkenelemente verwendet. Dazu sind 141 Knoten notwendig, was in 846 Freiheitsgraden resultiert. Die Elementsteifigkeiten als auch die Massen des Brückenlängsträgers und des Pylons werden in einer ersten Phase aufgrund der Herstellerangaben berechnet. Die Kabelsteifigkeiten werden in dieser Phase als konstant angenommen. Das heisst der Einfluss des Kabeldurchhanges ist nicht berücksichtigt, wodurch das Kabel bei den herrschenden kleinen Kräften zu steif modelliert wird. Die Vorspannung der Kabel ist so gewählt, dass unter Eigengewicht die vertikalen Verschiebungen bei den Kabelverankerungen in der Platte gleich Null sind.

### 3.2 Resultate aus statischen Lasten

Ein erster statischer Belastungstest wird durchgeführt. Die Struktur wird mit vier Betonklötzen von je einer Tonne belastet. Die Klötze werden in der Mitte der vier langen Plattenmodulen platziert (siehe Abb. 4). An der Brücke werden die Verschiebungen  $\delta$  jeweils zwischen zwei Elementen an der Seite gemessen.

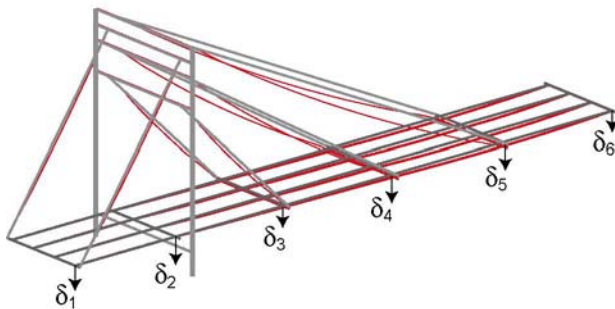


Abb. 4 – Erster Belastungstest der Brücke mit vier Betonquadern von je einer Tonne. Links sind die berechneten Verformungen der Struktur dargestellt. Die maximale berechnete Durchbiegung beträgt  $\delta_5 = 25.6$  mm, gemessen wurden 28.5 mm.

Die Differenz zwischen berechneter und gemessener Verschiebung ist vor allem auf die im FE-Modell zu steif modellierten Kabel zurückzuführen. Da ein Kabeldurchhang vorhanden ist, muss das Kabel zuerst gestreckt werden, bevor die eigentliche Steifigkeit in Längsrichtung wirksam wird. Dieser nichtlineare Effekt muss in einem zukünftigen Modell berücksichtigt werden.

### 3.3 Eigenfrequenzen und Eigenformen

Die Modalanalyse wird für zwei Fälle durchgeführt. Im ersten Fall wird die Struktur ohne zusätzlich Lasten untersucht. Bei den ersten ca. 25 Eigenmoden, beginnend bei 2 Hz, handelt es sich um verschiedenste Schwingungen der einzelnen Kabel während der Pylon und die Brückenplatte in Ruhe bleiben. Erst bei 6.59 Hz liegt die tiefste Biegeschwingung des Längsträgers (siehe Abb. 5) wobei diese stark gekoppelt ist mit Schwingungen der Kabel.

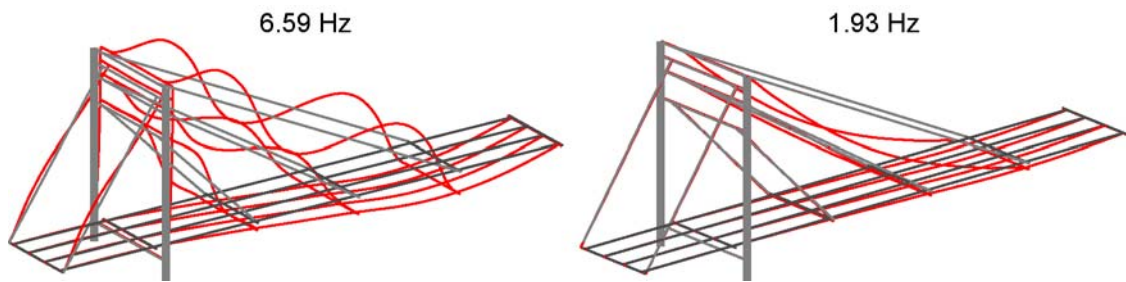


Abb. 5 – Erste Biegeeigenschwingung der Fussgängerbrücke. Links im unbelasteten Zustand und rechts mit einer über die gesamte Brücke verteilten Auflast von  $5 \text{ kNm}^{-2}$ .

Im zweiten untersuchten Fall wird eine Auflast von  $5 \text{ kNm}^{-2}$  auf die Brücke gebracht. Die Modalanalyse wird mit dieser Auflast, als zusätzliche Trägheitsmasse mitberücksichtigt, durchgeführt. Die erste Biegeeigenschwingung liegt nun bei  $1.93 \text{ Hz}$  und entspricht zugleich dem ersten Eigenmode. Die vielen Eigenmoden der Kabel liegen nun alle deutlich höher, da die grosse Auflast deutlich höhere Kräfte in den Seilen zufolge hat, was sich in höheren Resonanzfrequenzen äussert.

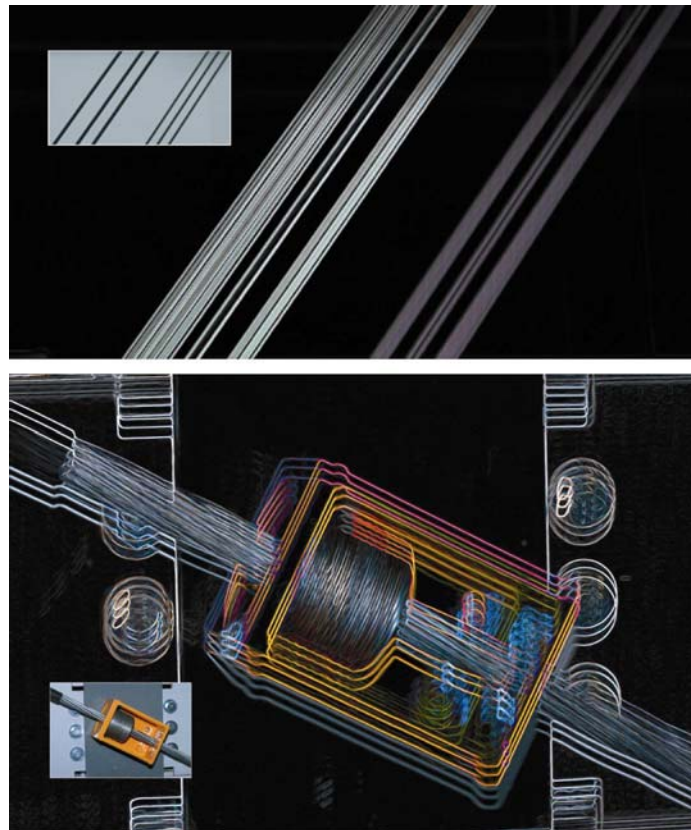


Abb. 6 – Graphische Darstellung der Brückenschwingungen. Oben: Überlagerung von 15 Bildern der schwingenden drei Rückhalteseile. Unten: überlagerte Konturen von drei Bildern einer Verankerung eines Schrägkabels, aufgenommen während die Brücke in ihrer ersten Biege-Eigenfrequenz schwingt.

## 4 Schlussfolgerungen und Ausblick

Eine Schrägseilbrücke für Fussgänger mit einer GFK-Fahrbahnplatte ist im Baulabor der EMPA errichtet worden. Das Tragwerk wurde entsprechend dem heutigen Entwicklungstrend zu immer schlankeren tragenden Strukturen konstruiert, was darin resultiert, dass diese Brücke ein Vibrationsproblem aufweist. Zur Lösung der dynamischen Probleme, welche

dieser Trend mit sich bringt, werden im Rahmen dieses Brückenprojektes Dämpfungs- und Überwachungssysteme entwickelt. Diese Brücke ist somit eine realitätsnahe Experimentierplattform für unterschiedlichste Forschungsprojekte im strukturellen Ingenieurbau.

In einer nächsten Phase werden die dynamischen Eigenschaften der Struktur eingehend untersucht. Basierend auf diesen Messungen wird das numerische Modell derart angepasst, dass es das wirkliche Verhalten der realen Struktur möglichst gut abbildet. Anschliessend werden nach und nach die einzelnen Teilprojekte integriert.

## Dank

Dieses Projekt wird durch die Gebert Rüt Stiftung ([www.grstiftung.ch](http://www.grstiftung.ch)) sowie den ETH-Rat finanziell unterstützt. Die Firmen Fiberline Composites S/A in Dänemark und Maagtechnic AG in der Schweiz, unterstützen das Projekt mit GFK-Profilen wie auch ihrem Fachwissen. Das Projekt ist zu dem in das 6. Forschungsrahmenprogramm der EU eingebunden.

## Referenzen

- [1] Bachmann, H., "Lively Footbridges- a Real Challenge", International Conference on Footbridge, AFGC-OTUA, Paris, France, 2002, pp 1-15.
- [2] Weber, F., Feltrin, G., Motavalli, M., and Aalderink, B.J., "Cable Vibration Mitigation Using Controlled Magnetorheological Fluid Dampers: A Theoretical and Experimental Investigation", International Conference on Footbridge, AFGC-OTUA, Paris, France, 2002.
- [3] Feltrin, G., "Temperature and damage effects on modal parameters of a reinforced concrete bridge", Eurodyn 2002, München, Germany, 2002.
- [4] De Roeck, G., Peeters, B., and Maeck, J., "Dynamic monitoring of civil engineering structures", Computational Methods for Shell and Spatial Structures, IASS-IACM 2000, Chania, Greece, 2000.
- [5] Timoshenko, S.P., Vibration problems in engineering, 3rd ed., Van Nostrand, Toronto, Canada, 1955.
- [6] Bazoune, A., Khulief, Y.A., and Stephen, N.G., "Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element", Journal of Sound and Vibration, 259, 2, 2003, pp 473-480.